

Quantized state and noise simulation of stochastic differential equations.

Noelia Pizzi^{1,2} , Damián Marelli^{4,1} , and Ernesto Kofman^{1,3} 

¹ CIFASIS - CONICET,

² FBIOyF - Universidad Nacional de Rosario, Argentina,

³ FCEIA - Universidad Nacional de Rosario, Argentina,

⁴ School of Automation, Guandong University of Technology, Guangzhou, China.
{pizzi,marelli,kofman}@cifasis-conicet.gov.ar

Abstract This work presents a novel method for the simulation of Stochastic Differential Equations (SDEs) based on Quantized State Systems (QSS) and the quantization of the underlying Wiener process using First Passage Time (FPT). The resulting scheme is fully asynchronous, updating both the states and the noise as significant changes occur. Furthermore, this paper introduces theoretical convergence results for the proposed method and provides an example illustrating its potential advantages.

Keywords: quantized state system methods · stochastic differential equations · first passage time

Simulación de ecuaciones diferenciales estocásticas por cuantización de estado y de ruido.

Resumen Este trabajo presenta un método novedoso para la simulación de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDEs) usando cuantificación de estado (QSS, por *Quantized State Systems*) y la cuantificación del proceso de Wiener involucrado en base a los tiempos de primer pasaje (FPT, por *First Passage Time*). El esquema resultante es totalmente asincrónico actualizando tanto los estados como el ruido cuando los mismos experimentan cambios significativos.

El trabajo además introduce resultados teóricos de convergencia del método propuesto y un ejemplo que ilustra las potenciales ventajas del mismo.

Palabras clave: métodos QSS · ecuaciones diferenciales estocásticas · tiempo de primer pasaje

1. Introducción

La modelización matemática de fenómenos sujetos a perturbaciones aleatorias, comunes en campos como la física, las finanzas, la química y la biología, se basa en gran medida en ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs). Sin embargo, la simulación numérica de EDEs sigue siendo

computacionalmente compleja. Los métodos tradicionales, como el esquema de Euler-Maruyama, propagan la solución utilizando un paso de tiempo fijo h , lo que requiere el muestreo periódico de los incrementos del proceso de Wiener. Este enfoque de paso fijo puede ser ineficiente, especialmente cuando el sistema presenta períodos de actividad lenta intercalados con cambios rápidos, o cuando se requiere alta precisión. Los métodos de cuantificación de estado (QSS) (Cellier & Kofman, 2006; Kofman & Junco, 2001) ofrecen un enfoque alternativo a la integración numérica. Desarrollados originalmente para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y ecuaciones diferenciales algebraicas (EDAs), se basan en técnicas de simulación de eventos discretos que hacen avanzar el tiempo del sistema de forma asíncrona en función de los eventos de estado. Por ejemplo, en los métodos QSS1 y QSS2 (métodos de orden 1 y 2, respectivamente), las variables de estado son constantes o lineales a trozos, y las funciones derivadas solo se reevalúan cuando el estado cuantificado de una variable cruza un umbral predefinido ΔQ . Esta característica ofrece ventajas en la eficiencia computacional, especialmente para sistemas rígidos o dispersos. En (Pizzi et al., 2026), se propuso una extensión de este marco para EDE. El esquema presentado se basa en el muestreo del proceso de Wiener a intervalos regulares h y actualizando de manera asíncrona los estados cuando cumplen con la condición de umbral. Sin embargo, el muestreo a tiempo fijo del ruido no aprovecha al máximo la naturaleza de QSS, ya que el solver se ve obligado a realizar actualizaciones incluso cuando la contribución del ruido es despreciable en relación con el quantum del estado. Para superar esta limitación estructural, es necesario avanzar hacia una formulación completamente asíncrona donde la entrada de ruido se trate como un generador de eventos. Este trabajo aborda dicha limitación considerando cuantificación del ruido mediante el Tiempo de Primer Pasaje (FPT). La principal contribución reside en la sustitución del muestreo periódico de ruido por una aproximación de ruido basada en eventos. Específicamente, el proceso de Wiener se aproxima mediante un proceso cuantificado cuyas actualizaciones se activan por el FPT de la trayectoria aleatoria que sale de una banda de cuantificación. Esto da como resultado un esquema de simulación puramente basado en eventos, donde tanto el estado como el ruido se gestionan de manera asíncrona. Presentamos la formulación matemática junto con las propiedades de convergencia del método. También se muestra un ejemplo de simulación que ilustra las posibles ventajas de utilizar este esquema.

2. Antecedentes

En esta sección se describen brevemente los métodos QSS para EDOs. También se resumen los métodos de cuantificación de estado para EDEs que consideran la aproximación del ruido mediante paso fijo. Por último, se define el tiempo de primer pasaje de un proceso estocástico y se muestra su distribución.

2.1. Métodos QSS para EDOs

Los métodos de cuantificación de estado representan una familia de algoritmos de integración numérica para ecuaciones diferenciales ordinarias (Cellier & Kofman, 2006; Kofman, 2002; Kofman & Junco, 2001; Migoni et al., 2013, 2015) que reemplazan la discretización tradicional del tiempo por la cuantificación de las variables de estado, permitiendo modelar sistemas continuos como sistemas de eventos discretos.

Consideremos un sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (1)$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ es una trayectoria conocida.

El método QSS de primer orden (QSS1) (Kofman & Junco, 2001) aproxima dicho sistema mediante:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{v}(t)), \quad (2)$$

donde $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el *vector de estado cuantificado* y $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ es una aproximación seccionalmente constante de $\mathbf{u}(t)$.

Cada componente $q_i(t)$ sigue una trayectoria seccionalmente constante que sólo cambia cuando su diferencia con el estado correspondiente $x_i(t)$ alcanza un valor ΔQ_i llamado *quantum*. Formalmente, las trayectorias están relacionada según:

$$q_i(t) = \begin{cases} q_i(t_k) & \text{si } |x_i(t) - q_i(t_k)| < \Delta Q_i \\ x_i(t) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $t_k < t \leq t_{k+1}$, donde t_{k+1} es el primer tiempo después de t_k en el cual $|x_i(t) - q_i(t_k)| = \Delta Q_i$.

A diferencia de los métodos con discretización temporal, QSS es inherentemente asincrónico. Cada variable de estado x_i se actualiza sólo cuando se desvía de su último valor cuantificado en más de ΔQ_i .

Este esquema permite que las variables del estado que cambian lentamente generen menos actualizaciones, mientras que las que cambian rápidamente se muestreen con mayor frecuencia.

La idea de QSS1 fue también extendida a métodos de orden mayor (QSS2 y QSS3) que comparten la definición de la Ec.(2), pero donde los estados cuantificados siguen trayectorias seccionalmente lineales y parabólicas. Hay también métodos linealmente implícitos (LIQSS1, LIQSS2 y LIQSS3) que funcionan eficientemente en ciertas clases de sistemas stiff. Un resumen reciente de los distintos métodos de QSS y sus principales aplicaciones puede encontrarse en (Castro et al., 2024).

2.2. Métodos QSS para EDEs

Recientemente, en (Pizzi et al., 2026), se presentó un primer enfoque de los métodos de cuantificación de estado para ecuaciones diferenciales estocásticas, en el cual se considera cuantificación para el estado y discretización temporal para el proceso del ruido.

Consideremos un sistema de EDEs de la forma:

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))dt + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))d\mathbf{w}(t) \quad (3)$$

donde $\mathbf{x} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un proceso estocástico desconocido, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, y $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^t : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un proceso de Wiener estándar m -dimensional.

La aproximación en este caso se basa en muestrear el proceso $\mathbf{w}(t)$ en los tiempos $t_k \triangleq kh$, con un período de muestreo constante $h = t_{k+1} - t_k$ y calcular los incrementos aleatorios como $\Delta \mathbf{w}(t_k) \triangleq \mathbf{w}(t_{k+1}) - \mathbf{w}(t_k)$. De esta manera, la aproximación QSS1 para el sistema de Ec. (3) está dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^q(\mathbf{q}(t), t) + \mathbf{g}^q(\mathbf{q}(t), t) \frac{\Delta \mathbf{w}(t_k)}{h}; \quad t \in [t_k, t_{k+1}); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4)$$

para $k = 0, 1, \dots$. Aquí, $\mathbf{q}(t)$ es el estado cuantificado calculado según el método QSS1 para EDOs y las funciones $\mathbf{f}^q(\mathbf{q}, t)$ y $\mathbf{g}^q(\mathbf{q}, t)$ son aproximaciones seccionalmente constantes de $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q}, t)$.

Se demostró que dicho esquema híbrido preserva las propiedades de convergencia y estabilidad de QSS y que el valor esperado del error de aproximación está acotado por:

$$E[||e(t)||] \leq C_q \Delta Q + C_w h \quad (5)$$

donde C_q y C_w son constantes positivas.

Si bien este método es robusto, depende de un paso de tiempo fijo h para el ruido, lo que obliga al motor de simulación a realizar actualizaciones periódicas incluso si el estado del sistema está en reposo. Este requisito de sincronización limita la naturaleza asíncrona de QSS. El presente trabajo aborda esta limitación reemplazando el muestreo periódico con una aproximación de ruido impulsada por eventos basada en el tiempo de primer paso (FPT), eliminando efectivamente la dependencia del parámetro h .

2.3. Distribución del Tiempo de Primer Pasaje (FPT)

El tiempo de primer pasaje es un concepto fundamental en los procesos estocásticos, definido como el tiempo aleatorio en el que un proceso B_t alcanza por primera vez un umbral o frontera predefinida. Para un movimiento browniano estándar $w(t)$ el tiempo τ necesario para salir de una banda de cuantificación simétrica $[-\Delta w, \Delta w]$ es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad puede expresarse mediante la siguiente expansión en serie:

$$f_\tau(t) = \frac{\pi}{\Delta w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 t}{8 \Delta w^2}\right)$$

Esta distribución es la que permite a la simulación determinar el momento exacto del próximo evento estocástico sin necesidad de un muestreo periódico. A partir de esta formulación, se puede derivar que el valor esperado del tiempo de salida es $E[T_{k,j}] = (\Delta w_j)^2$ y su varianza $Var[T_{k,j}] = \frac{2}{3} (\Delta w_j)^4$.

3. Resultados principales

En esta sección, presentamos la metodología para obtener soluciones aproximadas del sistema (3) utilizando cuantificación para el estado y el tiempo de primer pasaje para muestrear el término del ruido.

3.1. Aproximación del ruido

Para cada componente $w_j(t)$ del proceso de Wiener que interviene en la Ec. (3) se define un *quantum de ruido* Δw_j . Un evento de ruido ocurre cuando el proceso alcanza por primera vez un umbral de $\pm \Delta w_j$ respecto de su último valor cuantificado. La sucesión de eventos $\{\tau_k^j\}_{k \geq 0}$ se define como

$$\tau_{k+1}^j = \inf\{t > \tau_k^j : |w_j(t) - w_j(\tau_k^j)| = \Delta w_j\}$$

La derivada del ruido se aproxima mediante un vector constante a trozos $v(t)$, donde cada componente para $t \in [\tau_k^j, \tau_{k+1}^j)$ es:

$$v_j(t) \triangleq \frac{s_{k,j} \Delta w_j}{T_{k,j}}, \quad (6)$$

donde $s_{k,j} \in \{-1, 1\}$ es la dirección de cruce, definida por una variable aleatoria de Bernoulli, y $\mathbf{T}_{k,j} = \tau_{k+1}^j - \tau_k^j$ es el **tiempo de primer pasaje**.

Teniendo en cuenta la Ec. (6), cada componente de la aproximación del ruido $\tilde{\mathbf{w}}$ puede escribirse como:

$$\tilde{w}_j(t) = w_j(\tau_k^j) + \frac{s_{k,j} \Delta w_j}{T_{k,j}} (t - \tau_k^j), \quad t \in [\tau_k^j, \tau_{k+1}^j). \quad (7)$$

Para evitar que el esquema actúe como un filtro pasabajos que omita dinámicas rápidas, el umbral Δw_j debe elegirse de forma que el tiempo esperado $E[T_{k,j}] = (\Delta w_j)^2$ sea estrictamente menor a la constante de tiempo dominante del sistema.

3.2. Aproximación QSS

Combinando la cuantificación de estado con la aproximación FPT para el ruido, el sistema (3) se aproxima mediante la siguiente EDO:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^q(\mathbf{q}(t), t) + \tilde{\mathbf{g}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \quad t \in [\tau_k^j, \tau_{k+1}^j); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (8)$$

donde la matriz $\tilde{\mathbf{g}}(t)$ se define como: $\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{q}(\tau_{k_1}^j), \tau_{k_1}^j), \mathbf{g}_2(\mathbf{q}(\tau_{k_2}^j), \tau_{k_2}^j) \cdots \mathbf{g}_m(\mathbf{q}(\tau_{k_m}^j), \tau_{k_m}^j)) \right]$, siendo $\mathbf{g}_i$ la i -ésima columna del término de difusión $\mathbf{g}$.

A diferencia del método de paso fijo, este esquema no requiere un parámetro h global. El simulador mantiene una cola de eventos donde el próximo tiempo de simulación se determina dinámicamente como el mínimo entre los eventos de cambio de estado y los eventos de cruce de barrera del ruido. Esto permite una ejecución puramente asincrónica, donde los canales de ruido que más cambian disparan actualizaciones con mayor frecuencia que los estables.

El siguiente pseudo-código muestra una implementación del método:

Algoritmo 1.1. Algoritmo para el sistema (3).

```

1 // entradas:  $t_i$  (tiempo inicial),  $t_f$  (tiempo final),  $\mathbf{X}_0$  (estado inicial)
  //  $\Delta \mathbf{Q}$  (quantum del estado),  $\Delta \mathbf{W}$  (quantum del ruido)
2 // variables:
3 //  $t$  tiempo de simulación actual
4 //  $\mathbf{x}, \mathbf{q}$  vector de estado y vector de estado cuantificado
5 //  $u$  ruido
6 //  $t_j^\eta$  tiempo del próximo cambio de estado cuantificado  $q_j$ 
7 //  $t_k^w$  tiempo del próximo cruce de barrera por ruido  $w_k$ 
8 //  $t_j^x$  tiempo del último cambio de estado continuo  $x_j$ 
9
10 // Inicialización
11  $t = t_i$ 
12  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  // estado inicial
13  $\mathbf{q} = \mathbf{x}$  // estado cuantificado inicial
14 for each  $k \in [1, m]$  // Inicializar las fuentes de ruido
15    $\tau_k = \text{sampleFPT}(\Delta W_k)$  // muestreo del tiempo de primer pasaje
16    $\sigma_k = \text{sampleBernoulli}(-1, 1)$  // dirección de cruce
17    $t_k^w = t + \tau_k$  // tiempo del próximo evento de ruido
18 end for
19 for each  $j \in [1, n]$ 
20    $u_j = \sum_{k=1}^m g_{jk}(\mathbf{q}, t) \cdot \sigma_k \cdot \Delta W_k / \tau_k$ 
21    $\dot{x}_j = f_j(\mathbf{q}, t) + u_j$  // calcular derivada inicial
22    $t_j^\eta = t + \Delta Q_j / |\dot{x}_j|$  // próximo evento de estado
23    $t_j^x = t$  // tiempo de la última actualización de  $x_j$ 
24 end for
25
26 // Ciclo de simulación
27 while ( $t < t_f$ )
28    $t = \min(t_j^\eta, t_k^w)$  // avanzar al evento más cercano
29
30   if  $t$  is a state event // cambia el  $i$ -ésimo estado cuantificado
31      $i = \text{argmin}(t_j^\eta)$ 
32      $x_i = x_i + \dot{x}_i \cdot (t - t_i^x)$  // actualizar estado continuo
33      $q_i = x_i$ 
34      $t_i^x = t$ 

```

```

35     for each  $j \in [1, n]$  such_that  $\dot{x}_j$  depends_on  $q_i$ 
36          $x_j = x_j + \dot{x}_j \cdot (t - t_j^x)$ 
37          $\dot{x}_j = f_j(\mathbf{q}, t) + u_j$  // recalculando derivada
38          $t_j^x = t$ 
39          $t_j^\eta = t + \Delta Q_j / |\dot{x}_j|$  // actualizar proximo evento de estado
40     end for
41
42 else // evento de ruido: un umbral es alcanzado en  $k$ 
43      $k = \text{argmin}(t_j^w)$ 
44      $\tau_k = \text{sampleFPT}(\Delta W_k)$  // nuevo FPT para este canal
45      $\sigma_k = \text{sampleBernoulli}(-1, 1)$ 
46      $t_k^w = t + \tau_k$  // actualizar proximo evento para este ruido
47     for each  $j \in [1, n]$  such_that  $g_{jk} \neq 0$  // estados afectados por el ruido  $k$ 
48          $x_j = x_j + \dot{x}_j \cdot (t - t_j^x)$ 
49          $u_j = \sum_{k=1}^m g_{jk}(\mathbf{q}, t) \cdot \sigma_k \cdot \Delta W_k / \tau_k$ 
50          $\dot{x}_j = f_j(\mathbf{q}, t) + u_j$  // recalculando derivada
51          $t_j^x = t$ 
52          $t_j^\eta = t + \Delta Q_j / |\dot{x}_j|$  // actualizar proximo evento de estado
53     end for
54 end if
55 end while

```

La función **sampleFPT**($\Delta \mathbf{W}_k$) devuelve una variable aleatoria τ_k que representa el tiempo de primer pasaje de un proceso de Wiener estándar a las fronteras $\pm w_k$. Esta variable estocástica es fundamental para la naturaleza asincrónica del método propuesto, ya que determina la duración de los intervalos de ruido.

Existen diversas técnicas para simular esta distribución, por ejemplo, simulaciones directas de Monte Carlo de caminos aleatorios, inversión numérica de la función de distribución acumulada precalculada mediante tablas de búsqueda, o muestreo por rechazo exacto basado en la representación en series alternantes dada por la distribución del FPT.

Entre estos, el **método de rechazo exacto** (por ejemplo, el algoritmo de Devroye, ver (Devroye, 2006)) es particularmente eficiente y es el que consideraremos en este trabajo para simular el tiempo de primer pasaje. Su principal ventaja radica en que evita el sesgo de discretización inherente a los caminos aleatorios y los errores de interpolación de las tablas de búsqueda.

Este procedimiento se resume en los siguientes pasos:

- **Generación de un candidato:** Se genera un tiempo candidato τ^* a partir de una distribución propuesta $\alpha(t)$ fácil de muestrear y tal que acote superiormente a la distribución $f_\tau(t)$.
- **Variable de aceptación:** Se genera una variable uniforme $V \sim U(0, g(\tau^*))$ que será la utilizada para decidir si se acepta o no el candidato.
- **Evaluación de cotas alternantes:** Se calculan las sumas parciales $S_k = \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} a_n(\tau^*)$. Dado que la serie es alternante y sus términos decrecen monótonamente en valor absoluto, el valor real de la serie en τ^* queda acotado entre dos sumas parciales consecutivas $S_{2k} < f_\tau(\tau^*) < S_{2k-1}$.
- **Decisión:** Teniendo en cuenta lo anterior y considerando la variable de aceptación, se toma la decisión para el tiempo de muestreo:
 - Si $V \leq S_{2k}$, entonces el candidato τ^* se acepta.
 - Si $V > S_{2k-1}$, τ^* se rechaza.
 - Si $S_{2k} < V \leq S_{2k-1}$, el criterio no permite decidir y se debe calcular la siguiente suma parcial para acotar el intervalo de incertidumbre hasta que el valor de V quede fuera de las nuevas cotas.

3.3. Análisis de convergencia

Bajo condiciones estándar de crecimiento lineal y continuidad de Lipschitz para los coeficientes de deriva y difusión en la Ec. (3), se puede garantizar la convergencia del método. Supondremos que se cumplen las siguientes hipótesis:

A1 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\| \leq K_f(1 + \|\mathbf{x}\|)$ y $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\|_{\mathcal{F}} \leq K_g(1 + \|\mathbf{x}\|)$, para algunas constantes K_f, K_g .

A2 Existen constantes L_f, L_g y L_{f^q} tales que:

- $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^q, t^q) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\| \leq L_f (\|\mathbf{x}^q - \mathbf{x}\| + |t^q - t|)$.
- $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^q, t^q) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\| \leq L_g (\|\mathbf{x}^q - \mathbf{x}\| + |t^q - t|)$.
- $\|\mathbf{f}^q(\mathbf{x}^q, t^q) - \mathbf{f}^q(\mathbf{x}, t)\| \leq L_{f^q} (\|\mathbf{x}^q - \mathbf{x}\| + |t^q - t|)$.

A3 Además, asumimos que existe una constante M_f tal que $\|\mathbf{f}^q(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\| \leq M_f \|\Delta Q\|$.

Bajo estas condiciones, se establece el siguiente teorema, cuya demostración se presenta en el apéndice A.

Teorema 1 Sean $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}^q(t)$, las soluciones de (3) y (8), respectivamente. Si se satisfacen las hipótesis A1-A3 entonces, dado $T > 0$ existen constantes positivas $C_{\mathbf{q}}$ y $C_{\mathbf{w}}$ tales que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[\|\mathbf{x}^q(t) - \mathbf{x}(t)\|^2] \leq C_{\mathbf{q}} \|\Delta Q\|^2 + C_{\mathbf{w}} \|\Delta w\|^2. \quad (9)$$

4. Ejemplo

Para corroborar las propiedades de convergencia y analizar de manera relativa el desempeño del método propuesto, consideramos un conjunto de EDEs que representan un modelo de compartimentos múltiples de replicación viral propuesto en Browning et al., 2024 con la adición de términos no lineales, definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dv_0(t) &= -\theta(v_0(t) - \mu)dt + (a + bv_0(t))\sigma dw(t), \\ dv_i(t) &= K(v_{i-1}(t) - v_i(t))dt + r \frac{v_i(1 - v_i)}{(v_i - 0.5)^2 + m} dt, \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (10)$$

donde $w(t) \in \mathbb{R}$ es un proceso de Wiener escalar.

Definimos dos casos:

- Un caso lineal con $a = 1$, $b = r = 0$. Aquí, el primer estado $v_0(t)$ puede considerarse como una entrada aleatoria que sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con valor medio μ , intensidad de ruido σ , y fuerza de reversión θ . Los estados restantes, $v_1, \dots, v_{N-1}$, representan la concentración de material en los compartimentos, y k es la tasa a la que el material se desplaza entre dichos compartimentos.
- Un caso no lineal con $a = 0$, $b = 1$, $r = 0.01$, y $m = 10^{-6}$, por lo que la EDE contiene ruido multiplicativo y dinámica no lineal.

Para las simulaciones, utilizamos el *Stand Alone QSS Solver* (Fernández & Kofman, 2014) que implementa los algoritmos de QSS sobre modelos definidos en el lenguaje Micromodelica. El Código 1.2 muestra el modelo expresado en dicha herramienta.

Algoritmo 1.2. SDE of Eq. (10) in the Stand Alone QSS Solver

1 `model virusfpt`

```

2   parameter Real K=0.3, th=1, mu=1, sigma=0.1, r=0.01, a=0, b=1, m=1
      e-6;
3   parameter Real dW=0.1; //noise quantization
4   constant Integer N=9; //state dimension - 1
5   Real v0, v[N]; //state variables
6   discrete Real v0k,dwk; // sampled state and noise increment
7   discrete Real tlast,h; //time of last noise sample and next interval
8   discrete Integer k; //auxiliary variable
9   discrete Real uni; //auxiliary variable
10  equation
11    der(v0)=-th*(v0-mu)+(a+b*v0k)*sigma*dwk/h;
12    der(v[1])=K*(v0-v[1])+r*v[1]*(1-v[1])/((v[1]-0.5)^2+m);
13    for i in 2:N loop
14      der(v[i])=K*(v[i-1]-v[i])+r*v[i]*(1-v[i])/((v[i]-0.5)^2+m);
15    end for;
16  algorithm
17    when time>tlast+h then
18      v0k:=v0; //sample current v0 value
19      uni:=random(1.0); //generate noise sign from uniform random
20      if uni>0.5 then
21        dwk:=dW;
22      else
23        dwk:=-dW;
24      end if;
25      h:=FPT(dW); //first passage time random value (C function)
26      tlast:=time;
27    end when;
28  end virusfpt;

```

Para ambos casos, simulamos el sistema durante un período de 30 segundos, considerando el conjunto de parámetros: $\theta = \mu = 1$, $K = 0.3$, y $\sigma = 0.1$. También seleccionamos $N = 10$ como el número de compartimentos. La Figura 1 muestra las trayectorias para el caso no lineal.

En las distintas simulaciones variamos los parámetros $\Delta \mathbf{w}$ y $\Delta \mathbf{Q}$ utilizando los métodos de QSS1 y QSS2 (QSS3 no se utilizó ya que el muestreo frecuente del ruido no permite realizar pasos largos por lo que no vale la pena un método de orden alto).

Respecto a la generación de las secuencias pseudoaleatorias de ruido, se utilizó el algoritmo de rechazo exacto de Devroye (Devroye, 2006) con un parámetro $\Delta \mathbf{w}_{\text{ref}} = 0.001$, generando 10 caminos *finos* de Wiener diferentes a partir de distintas semillas. Luego, cada camino *fino* (que tiene puntos cada vez que $w(t)$ difiere de la muestra anterior en $\Delta \mathbf{w}_{\text{ref}} = 0.001$) puede submuestrearse de manera exacta para distintos valores de $\Delta \mathbf{w}$ que sean múltiplos de $\Delta \mathbf{w}_{\text{ref}}$.

Usando cada camino se calculó el error según la fórmula

$$e = \frac{1}{10} \sum_{s=1}^{10} \max_{t_k} \|\mathbf{x}_s(t_k) - \mathbf{x}_s^{\text{ref}}(t_k)\| \quad (11)$$

donde $\mathbf{x}_s(t) = [v_0(t), \dots, v_{N-1}(t)]$ es la trayectoria de simulación obtenida usando la secuencia de Wiener generada a partir de la semilla s y $\mathbf{x}_s^{\text{ref}}(t)$ es la trayectoria que utiliza la secuencia de ruido correspondiente con el parámetro $\Delta \mathbf{w}_{\text{ref}} = 0.001$.

Además del error se midió en cada caso el número de pasos y el tiempo de CPU consumido por cada simulación (todas las simulaciones se corrieron en un servidor con procesador Intel Xeon CPU E5-2609 v4 @ 1.70GHz y 16Gb de RAM con sistema operativo Ubuntu 24.04). Los resultados están reportados en la Tabla 1.

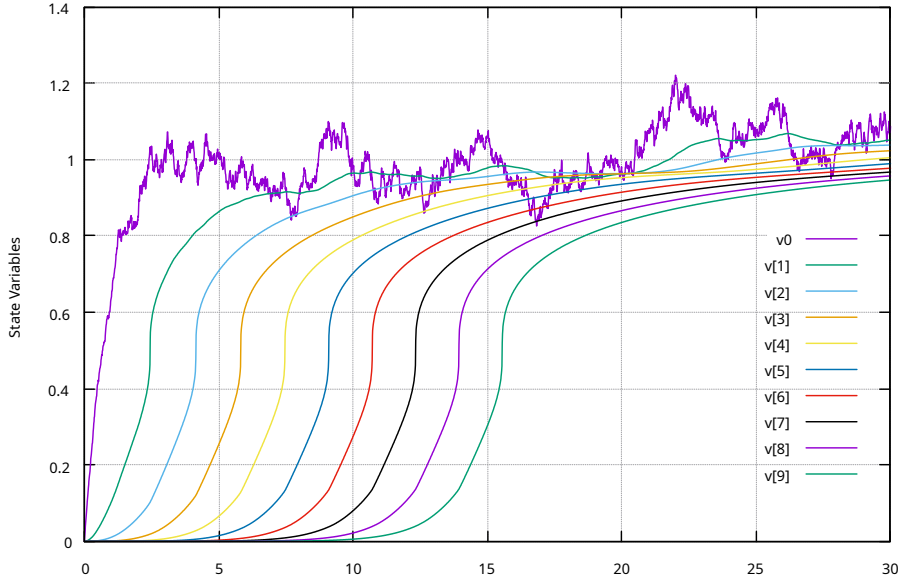


Figura 1. Trayectorias del sistema de la Ec.(10).

Estos resultados permiten observar lo siguiente:

- Los errores parecen algo altos en valor absoluto, pero es debido a que calculan el máximo de la norma que, con la forma empinada de las trayectorias al cruzar el valor $v_i = 0.5$ (ver Fig.1), adopta un valor grande. Aún así, se observa la convergencia lineal tanto con $\Delta \mathbf{w}$ como con $\Delta \mathbf{Q}$.
- El método de QSS2 tiene mejor desempeño que QSS1 en prácticamente todas las configuraciones.
- Vale destacar que la simulación del caso no lineal es prácticamente imposible con métodos clásicos como Euler-Maruyama debido al pasaje abrupto alrededor de $v_i = 0.5$ Pizzi et al., 2026 y muestra una convergencia lenta del error usando QSS con muestreo constante del ruido ($\sqrt{h}$). En este caso, la convergencia lineal aparece como una ventaja.

5. Conclusiones

En este trabajo se presentó un nuevo esquema de integración para EDEs que elimina la dependencia de un paso de tiempo fijo para el ruido, logrando una simulación puramente basada en eventos. La incorporación del tiempo de primer pasaje (FPT) permite gestionar la incertidumbre estocástica de manera asincrónica, optimizando el esfuerzo computacional ya que evita el muestreo periódico innecesario en períodos de baja actividad. Se establecieron cotas para el error esperado que dependen directamente de los quantums elegidos, proporcionando una base sólida para la convergencia del esquema propuesto. El uso del método de rechazo exacto para simular la distribución FPT permite una representación del proceso de Wiener sin los sesgos de discretización propios de los métodos tradicionales de paso fijo. Por último, los resultados obtenidos en los ejemplos demuestran que el esquema no solo preserva las propiedades de convergencia de los métodos QSS, sino que ofrece una alternativa robusta y eficiente para la simulación de sistemas estocásticos complejos.

Método	Δw	ΔQ	Modelo No Lineal			Modelo Lineal		
			e	Pasos	T.CPU	e	Pasos	T.CPU
QSS1	1	1E-1	6.20E-1	299	0.59	3.26E-1	299	0.58
		1E-2	2.11E-1	2064	0.98	1.99E-1	2064	0.98
		1E-3	1.73E-1	19655	4.45	1.90E-1	19655	4.42
		1E-4	1.71E-1	195788	42.82	1.89E-1	195788	42.95
		1E-5	1.71E-1	1956984	424.11	1.89E-1	1956984	427.96
	0.1	1E-1	6.12E-1	11943	8.88	2.30E-1	11943	8.88
		1E-2	1.92E-1	17949	9.95	3.08E-2	17949	10.28
		1E-3	8.20E-2	114054	36.10	1.78E-2	114054	36.17
		1E-4	2.58E-2	1077948	298.33	1.74E-2	1077948	293.43
		1E-5	1.91E-2	10716661	2716.22	1.74E-2	10716661	2721.70
	0.01	1E-1	6.12E-1	857515	607.01	2.30E-1	857515	607.99
		1E-2	1.91E-1	867311	604.85	2.53E-2	867311	591.06
		1E-3	8.15E-2	1338815	741.08	3.21E-3	1338815	751.08
		1E-4	2.14E-2	8784999	2765.49	1.81E-3	8784999	2772.04
		1E-5	3.30E-3	83282439	22284.20	1.74E-3	83282439	22364.40
QSS2	1	1E-1	6.36E-1	624	0.78	2.67E-1	624	0.78
		1E-2	2.72E-1	894	0.89	1.90E-1	894	0.94
		1E-3	1.73E-1	1987	1.28	1.88E-1	1987	1.28
		1E-4	1.71E-1	5941	2.87	1.89E-1	5942	2.74
		1E-5	1.71E-1	18871	7.47	1.89E-1	18871	7.46
	0.1	1E-1	6.31E-1	10638	8.37	2.59E-1	10663	8.38
		1E-2	3.07E-1	22936	13.16	3.01E-2	19600	11.90
		1E-3	1.15E-1	20250	21.12	1.74E-2	20229	12.09
		1E-4	4.49E-2	25311	14.76	1.74E-2	25299	14.60
		1E-5	2.01E-2	53637	25.74	1.74E-2	53700	25.57
	0.01	1E-1	6.00E-1	705567	527.53	2.25E-1	705545	532.85
		1E-2	2.71E-1	751360	557.32	2.21E-2	751350	558.87
		1E-3	1.13E-1	1160010	748.42	3.08E-3	1160009	743.85
		1E-4	4.28E-2	1382063	863.78	1.75E-3	1382065	835.86
		1E-5	7.73E-3	1416244	854.51	1.74E-3	1416282	832.94

Tabla 1. Error, número de pasos y tiempos de simulación.

El trabajo abre varias líneas hacia adelante ya que resta estudiar a fondo la eficiencia computacional del enfoque, determinar si hay convergencia más rápida en sistemas lineales, e incluso analizar si hay propiedades de convergencia de error no sólo en esperanza sino también en el sentido determinístico (esto último lo sugiere el hecho de que la manera de discretizar el camino de Wiener garantiza una diferencia acotada en todo momento entre el proceso original y el cuantizado).

Referencias

- Browning, A. P., Jenner, A. L., Baker, R. E., & Maini, P. K. (2024). Smoothing in linear multi-compartment biological processes subject to stochastic input. *Physical Review E*, 109(5), 054405.
- Castro, R., Bergonzi, M., Marcosig, E. P., Fernández, J., & Kofman, E. (2024). Discrete-event simulation of continuous-time systems:: evolution and state of the art of quantized state system methods. *SIMULATION*, 100(6), 613-638.

- Cellier, F. E., & Kofman, E. (2006). *Continuous system simulation*. Springer Science & Business Media.
- Devroye, L. (2006). Nonuniform random variate generation. *Handbooks in operations research and management science*, 13, 83-121.
- Fernández, J., & Kofman, E. (2014). A stand-alone quantized state system solver for continuous system simulation. *Simulation*, 90(7), 782-799.
- Kofman, E. (2002). A Second Order Approximation for DEVS Simulation of Continuous Systems. *Simulation: Transactions of the Society for Modeling and Simulation International*, 78(2), 76-89.
- Kofman, E., & Junco, S. (2001). Quantized-state systems: a DEVS Approach for continuous system simulation. *Transactions of the Society for Computer Simulation International*, 18(3), 123-132.
- Migoni, G., Bortolotto, M., Kofman, E., & Cellier, F. E. (2013). Linearly implicit quantization-based integration methods for stiff ordinary differential equations. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 35, 118-136.
- Migoni, G., Kofman, E., Bergero, F., & Fernández, J. (2015). Quantization-based simulation of switched mode power supplies. *Simulation*, 91(4), 320-336.
- Pizzi, N., Bergonzi, M., Fernandez, J., Marelli, D., & Kofman, E. (2026). Quantized state system methods for stochastic differential equations. *Computational and Applied Mathematics*, 45(4), 157.

A. Prueba del Teorema 1

A.1. Resultados auxiliares

Para probar el Teorema 1, primero debemos mostrar que la aproximación del ruido de Tiempo de Primera Parada (FPT) $\tilde{\mathbf{w}}$ converge fuertemente al proceso de Wiener exacto $\mathbf{w}(t)$.

Lema 1 *Sea $w_j(t)$ un proceso de Wiener estándar y $\tilde{w}_j(t)$ su aproximación lineal a trozos basada en FPT-based con quantum Δw_j . Entonces, dado $T > 0$, resulta*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{w}_j(t) - w_j(t)|^2 \right] \leq 4(\Delta w_j)^2. \quad (12)$$

Demostración. Consideremos la secuencia de tiempos de parada $\{\tau_k\}_{k \geq 0}$ definida por la condición FPT $|w_j(\tau_{k+1}) - w_j(\tau_k)| = \Delta w_j$. Para cualquier tiempo $t \in [0, T]$, sea k el índice tal que $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$. El error de aproximación en el tiempo t es $e(t) \triangleq \tilde{w}_j(t) - w_j(t)$. Entonces,

$$|e(t)| \leq |\tilde{w}_j(t) - w_j(\tau_k)| + |w_j(\tau_k) - w_j(t)| < 2\Delta w_j,$$

donde la última desigualdad se deriva de la Ec. (7) y la definición del tiempo de primera parada τ_k .

Dado que esta cota se mantiene para cualquier t independientemente de la duración estocástica $T_k = \tau_{k+1} - \tau_k$, se cumple para el supremo global:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{w}_j(t) - w_j(t)|^2 \leq (2\Delta w_j)^2 = 4(\Delta w_j)^2.$$

y el resultado se sigue tras tomar la esperanza en esta última expresión.

El siguiente lema proporciona una cota superior para el incremento del estado sobre un intervalo entre dos eventos de ruido.

Lema 2 Sea τ el tiempo de un evento de ruido, y $s \in [\tau, \tau_{next})$, donde τ_{next} es el tiempo del siguiente evento de ruido para un proceso de Wiener w_j . Entonces, existe $C > 0$ tal que

$$\mathbb{E} [\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\tau)\|^2] \leq C(\Delta w_j)^2. \quad (13)$$

Demostración. Sobre el intervalo $[\tau, s]$, tenemos

$$\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\tau) = \int_{\tau}^s \mathbf{f}(\mathbf{x}(u), u) du + \int_{\tau}^s \mathbf{g}(\mathbf{x}(u), u) dw(u).$$

Luego, tomando la norma al cuadrado y utilizando $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, resulta

$$\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\tau)\|^2 \leq 2 \left\| \int_{\tau}^s \mathbf{f}(\mathbf{x}(u), u) du \right\|^2 + 2 \left\| \int_{\tau}^s \mathbf{g}(\mathbf{x}(u), u) dw(u) \right\|^2.$$

Ahora, tomando la esperanza en ambos lados y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la primera integral y la isometría de Itô en el segundo término, obtenemos

$$\mathbb{E} [\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\tau)\|^2] \leq 2\mathbb{E} \left[(s - \tau) \int_{\tau}^s \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(u), u)\|^2 du \right] + 2\mathbb{E} \left[\int_{\tau}^s \|\mathbf{g}(\mathbf{x}(u), u)\|_{\mathcal{F}}^2 du \right]$$

Por las condiciones de crecimiento lineal, $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)\|^2 \leq K_f^2(1 + \|\mathbf{x}(t)\|^2)$ y $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)\|^2 \leq K_g^2(1 + \|\mathbf{x}(t)\|^2)$. Esto implica que existe $M > 0$ tal que $\sup_{u \in [0, T]} \mathbb{E}[1 + \|\mathbf{x}(u)\|^2] \leq M$ y podemos escribir

$$\mathbb{E} [\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\tau)\|^2] \leq 2MK_f^2 \mathbb{E} [(s - \tau)^2] + 2MK_g^2 \mathbb{E} [(s - \tau)].$$

Ahora, dividiendo ambos lados por $(\Delta w_j)^2$ y tomando el límite cuando $\Delta w_j \rightarrow 0$, se sigue que

$$\limsup_{\Delta w_j \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} [\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\tau)\|^2]}{(\Delta w_j)^2} \leq \lim_{\Delta w_j \rightarrow 0} 2MK_f^2 \frac{\mathbb{E} [(s - \tau)^2]}{(\Delta w_j)^2} + \lim_{\Delta w_j \rightarrow 0} 2MK_g^2 \frac{\mathbb{E} [s - \tau]}{(\Delta w_j)^2}.$$

Dado que la duración del intervalo está determinada por el tiempo de primera parada del proceso de Wiener a través de una banda de tamaño Δw_j , tenemos que $\mathbb{E}[s - \tau] \leq (\Delta w_j)^2$ y $\mathbb{E}[(s - \tau)^2] = \mathcal{O}((\Delta w_j)^4)$. Por consiguiente, el primer término del lado derecho desaparece en el límite:

$$\limsup_{\Delta w_j \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} [\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\tau)\|^2]}{(\Delta w_j)^2} \leq 2MK_g^2.$$

Esto implica que para un Δw_j suficientemente pequeño, existe una constante $C \approx 2MK_g^2$ such that $\mathbb{E} [\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(\tau)\|^2] \leq C(\Delta w_j)^2$, lo que completa la demostración.

A.2. Prueba del Teorema 1

Utilizando los resultados de los lemas 1 y 2, procedemos a probar el Teorema 1.

Demostración. Sean $\mathbf{x}^q(t)$ y $\mathbf{x}(t)$ las soluciones de la Ec. (8) y de la Ec. (3), respectivamente. Entonces,

$$\mathbf{x}^q(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}^q(\mathbf{q}(s), s) ds + \int_0^t \tilde{\mathbf{g}}(s) d\tilde{\mathbf{w}}(s)$$

y

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s) ds + \int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{x}(s), s) d\mathbf{w}(s).$$

Definimos $\mathbf{e}(t) \triangleq \mathbf{x}^q(t) - \mathbf{x}(t)$, luego

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \int_0^t [\mathbf{f}^q(\mathbf{q}(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s)] ds + \int_0^t \tilde{\mathbf{g}}(s) d\tilde{\mathbf{w}}(s) + \int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{x}(s), s) d\mathbf{w}(s) \\ &= \int_0^t [\mathbf{f}^q(\mathbf{q}(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s)] ds + \int_0^t \tilde{\mathbf{g}}(s) [d\tilde{\mathbf{w}}(s) - d\mathbf{w}(s)] + \int_0^t [\tilde{\mathbf{g}}(s) - \mathbf{g}(\mathbf{x}(s), s)] d\mathbf{w}(s), \end{aligned}$$

donde en la última ecuación sumamos y restamos el término $\int_0^t \tilde{\mathbf{g}}(s) d\mathbf{w}(s)$. Ahora, definiendo

$$\begin{aligned} I_1(t) &\triangleq \int_0^t [\mathbf{f}^q(\mathbf{q}(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s)] ds, \\ I_2(t) &\triangleq \int_0^t \tilde{\mathbf{g}}(s) [d\tilde{\mathbf{w}}(s) - d\mathbf{w}(s)], \text{ y} \\ I_3(t) &\triangleq \int_0^t [\tilde{\mathbf{g}}(s) - \mathbf{g}(\mathbf{x}(s), s)] d\mathbf{w}(s), \end{aligned}$$

podemos escribir $\mathbf{e}(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)$. Luego, tomando la norma al cuadrado, usando la desigualdad $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ y tomando la esperanza en ambos lados, resulta

$$\mathbb{E}[\|\mathbf{e}(t)\|^2] \leq 3(\mathbb{E}[\|I_1(t)\|^2] + \mathbb{E}[\|I_2(t)\|^2] + \mathbb{E}[\|I_3(t)\|^2]).$$

Ahora estimamos cada término por separado.

Cota para I_1 : Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y las hipótesis (A1), (A2) y (A3), resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|I_1(t)\|^2] &\leq tE \left[\int_0^t \|\mathbf{f}^q(\mathbf{q}(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s)\|^2 ds \right] \\ &\leq 2TE \left[\int_0^t \|\mathbf{f}^q(\mathbf{q}(s), s) - \mathbf{f}^q(\mathbf{x}(s), s)\|^2 ds + \int_0^t \|\mathbf{f}^q(\mathbf{x}(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s)\|^2 ds \right] \\ &\leq 2TL_{f^q}^2 \int_0^t \mathbb{E}[\|\mathbf{q}(s) - \mathbf{x}(s)\|^2] ds + 2M_f^2 \|\Delta Q\|^2 T. \end{aligned}$$

Ahora, usando la desigualdad triangular $\|\mathbf{q}(s) - \mathbf{x}(s)\| \leq \|\mathbf{q}(s) - \mathbf{x}^q(s)\| + \|\mathbf{x}^q(s) - \mathbf{x}(s)\|$ y la cota de cuantización QSS, obtenemos:

$$\mathbb{E}[\|I_1(t)\|^2] \leq 4TL_{f^q}^2 \int_0^t \mathbb{E}[\|\mathbf{e}(s)\|^2] ds + 4T^2 L_{f^q}^2 \|\Delta Q\|^2 + 2TM_f^2 \|\Delta Q\|^2. \quad (14)$$

Cota para I_2 : Primero, usamos integración estocástica por partes para reescribir $I_2(t)$ como sigue:

$$I_2(t) = \int_0^t \tilde{\mathbf{g}}(s) [d\tilde{\mathbf{w}}(s) - d\mathbf{w}(s)] = \tilde{g}(t) [\tilde{\mathbf{w}}(t) - \mathbf{w}(t)] - \int_0^t [\tilde{\mathbf{w}}(s) - \mathbf{w}(s)] d\tilde{\mathbf{g}}(s).$$

Como $\tilde{\mathbf{g}}(s)$ es constante a tramos, la última integral se anula porque $\mathbf{w}(\tau_k) = \tilde{\mathbf{w}}(\tau_k)$ en los instantes de los eventos de ruido. Así, teniendo en cuenta el crecimiento lineal de $\mathbf{g}$ y la definición de $\tilde{\mathbf{g}}$, se tiene que

$$\|I_2(t)\|^2 \leq K_g^2(1 + \|\mathbf{q}(t)\|)^2 \|\tilde{\mathbf{w}}(t) - \mathbf{w}(t)\|^2.$$

Luego, tomando esperanza y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene que

$$\mathbb{E}\|I_2(t)\|^2 \leq K_g^2 \sqrt{\mathbb{E}(1 + \|\mathbf{q}(t)\|)^4} \sqrt{\mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{w}}(t) - \mathbf{w}(t)\|^4}$$

Finalmente, considerando propiedades de acotación de momentos para el primer factor y aplicando el Lema 1, podemos concluir que

$$\mathbb{E}[\|I_2(t)\|^2] \leq K_g^2 M_q \tilde{C} \|\Delta w\|^2, \quad (15)$$

siendo M_q una constante tal que $\sqrt{\mathbb{E}(1 + \|\mathbf{q}(t)\|)^4} \leq M_q$ y $\tilde{C}$ la cota que surge de la aplicación del lema 1.

Cota para I_3 : Aplicando la isometría de Itô y, luego, usando la continuidad de Lipschitz de g en los vectores columna que definen $\tilde{\mathbf{g}}(s)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|I_3(t)\|^2] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \|\tilde{\mathbf{g}}(s) - \mathbf{g}(\mathbf{x}(s), s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds \right] \\ &\leq 3L_g^2 \sum_{j=1}^m \int_0^t \left(\mathbb{E}[\|\mathbf{q}(\tau_{k_j}^j) - \mathbf{x}^q(\tau_{k_j}^j)\|^2] + \mathbb{E}[\|\mathbf{x}^q(\tau_{k_j}^j) - \mathbf{x}(\tau_{k_j}^j)\|^2] + \right. \\ &\quad \left. + 2\mathbb{E}[\|\mathbf{x}(\tau_{k_j}^j) - \mathbf{x}(s)\|^2] + 2\mathbb{E}[\|\tau_{k_j}^j - s\|^2] \right) ds. \end{aligned}$$

Ahora, considerando la cota de cuantización QSS en el primer término, y notando que $\|\mathbf{x}^q(\tau_{k_j}^j) - \mathbf{x}(\tau_{k_j}^j)\|^2 = \|e(\tau_{k_j}^j)\|^2 \leq \sup_{0 \leq u \leq s} \|e(u)\|^2$, tenemos que

$$\mathbb{E}[\|I_3(t)\|^2] \leq 3L_g^2 \sum_{j=1}^m \int_0^t \left(\|\Delta Q\|^2 + \mathbb{E}[\sup_{0 \leq u \leq s} \|e(u)\|^2] + 2\mathbb{E}[\|\mathbf{x}(\tau_{k_j}^j) - \mathbf{x}(s)\|^2] + 2\mathbb{E}[\|\tau_{k_j}^j - s\|^2] \right) ds.$$

Aplicando la Desigualdad de Doob's y el Lema 2, resulta

$$\mathbb{E}[\|I_3(t)\|^2] \leq 3L_g^2 mT \|\Delta Q\|^2 + 3L_g^2 mD \int_0^t \mathbb{E}[\|e(s)\|^2] ds + 6L_g^2 TC \|\Delta w\|^2 \quad (16)$$

Así, combinando las cotas dadas por las ecuaciones (14), (15), y (16), obtenemos la siguiente estimación para el valor esperado de la norma al cuadrado del error:

$$\mathbb{E}[\|e(t)\|^2] \leq C_1 \int_0^t \mathbb{E}[\|e(s)\|^2] ds + C_2 \|\Delta Q\|^2 + C_3 \|\Delta w\|^2,$$

donde $C_1 = 3(4TL_{f^q}^2 + 3mDL_g^2)$, $C_2 = 3T(4TL_{f^q}^2 + 2M_f^2 + 3mL_g^2)$, y $C_3 = 3(K_g^2 M_q \tilde{C} + 6TL_g^2 C)$. Ahora, aplicamos el Lema de Gronwall y obtenemos

$$\mathbb{E}[\|e(t)\|^2] \leq (C_2 \|\Delta Q\|^2 + C_3 \|\Delta w\|^2) e^{C_1 t}.$$

Finalmente, para un tiempo $T > 0$, se llega al resultado final:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[\|\mathbf{x}^q(t) - \mathbf{x}(t)\|^2] \leq C_{\mathbf{q}} \|\Delta Q\|^2 + C_{\mathbf{w}} \|\Delta w\|^2,$$

siendo $C_{\mathbf{q}} = C_2 e^{C_1 T}$ y $C_{\mathbf{w}} = C_3 e^{C_1 T}$.