

Moment-Matching Based Model Order Reduction of a Vanadium Redox Flow Battery System

Mateo Zappettini¹ , Jorge Anderson¹ , Paul Puleston¹ , Thomas Puleston² , and Nicolás Faedo³ 

¹ Instituto de Investigaciones en Electrónica, Control y Procesamiento de Señales - LEICI (UNLP-CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La

Plata, Argentina. (zappettini.mateo@ing.unlp.edu.ar,

jorgeluis.anderson@ing.unlp.edu.ar, puleston@ing.unlp.edu.ar)

² Automatic Control Department (ESAI), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain. (thomas.paul.puleston@upc.edu)

³ Department of Mechanical and Aerospace Engineering (DIMEAS), Politecnico di Torino, Turin, Italy. (nicolas.faedo@polito.it)

Abstract This work presents a model order reduction approach based on moment matching applied to the concentration dynamics of a vanadium redox flow battery. Starting from an eighth-order nonlinear representation obtained from mass balance equations, conservation principles are used to derive a minimal sixth-order model, which is then linearized around an operating point defined by the state of charge, current and conversion factor. Based on this representation, a second-order reduced model is constructed, whose dynamics are adjusted through a frequency-domain optimization procedure. Results show that the reduced model accurately captures the system dynamics in the vicinity of the operating point, making it suitable for analysis and control design purposes.

Keywords: Vanadium redox flow battery, dynamic modeling, model order reduction, moment matching.

Reducción de orden del modelo de un sistema de batería de flujo redox de vanadio vía interpolación de momentos

Resumen En este trabajo se presenta un enfoque de reducción de orden basado en interpolación de momentos aplicado a un modelo dinámico de concentraciones de una batería de flujo redox de vanadio. Partiendo de una representación no lineal de orden ocho obtenida mediante balances de masa, se emplean principios de conservación para obtener un modelo mínimo de orden seis, que luego se linealiza en torno a un punto de operación definido por el estado de carga, la corriente y el factor de conversión. Sobre esta representación se construye un modelo reducido de orden dos cuya dinámica se ajusta mediante un procedimiento de optimización basado en la respuesta en frecuencia. Los resultados obtenidos muestran que el modelo reducido reproduce adecuadamente la dinámica del sistema en el entorno del punto de operación, resultando adecuado para su utilización en tareas de análisis y diseño de estrategias de control.

Palabras clave: baterías de flujo redox de vanadio, modelado dinámico, reducción de orden de modelos, interpolación de momentos.

1. Introducción

La batería de flujo redox de Vanadio (*Vanadium Redox Flow Battery*, VRFB), desarrollada en la década de 1980 por Skyllas-Kazacos et al. (1986), se perfila actualmente como una de las tecnologías más prometedoras para el almacenamiento de energía a gran escala, debido a su escalabilidad, flexibilidad operativa, larga vida útil y a sus condiciones de operación no tóxicas (Aluko and Knight, 2023). En este tipo de sistemas, la energía es proporcionada por la reacción redox entre iones de Vanadio, disueltos en una solución de ácido sulfúrico denominada electrolito. El sistema se divide en un “lado negativo”, donde el electrolito (anólito) contiene V^{2+} y V^{3+} , y un “lado positivo”, donde el electrolito (católito) contiene V^{4+} y V^{5+} , presentes en forma de los óxidos VO^{2+} y VO_2^+ respectivamente (Puleston et al., 2022).

Desde el punto de vista constructivo, un sistema típico de VRFB consta de, al menos, tres componentes esenciales: un par de tanques donde se almacenan ambos electrolitos; una celda electroquímica, o *stack* de celdas, responsable de producir la energía eléctrica; y un subsistema hidráulico encargado de garantizar la circulación de electrolito entre los componentes anteriores (Puleston et al., 2022). Cada celda se encuentra dividida en dos semiceldas mediante una membrana polimérica, que actúa como separador de los electrolitos y, al mismo tiempo, permite el transporte de protones necesario para cerrar el circuito eléctrico y asegurar el flujo continuo de la corriente (Bogdanov et al., 2023). Una representación esquemática de un sistema de VRFB se presenta en la Fig. 1

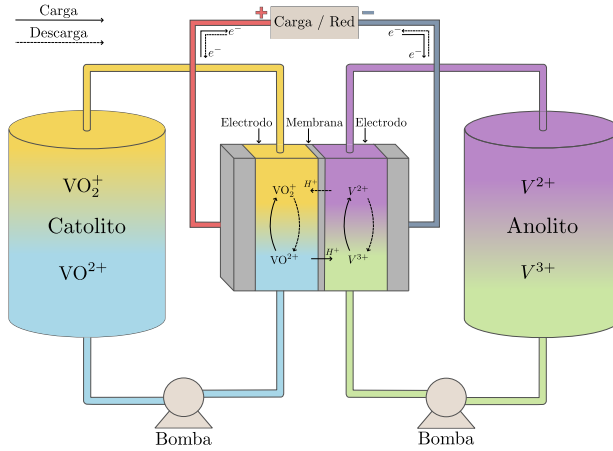


Figura 1. Esquemático general de un sistema de VRFB (Puleston et al., 2022).

Numerosos trabajos de investigación se han realizado para mejorar el rendimiento del sistema de VRFB, con principal foco en el diseño físico óptimo de sus componentes y materiales (Clemente et al., 2020). Sin embargo, el desarrollo de estrategias adecuadas de operación y control resulta también fundamental para maximizar la eficiencia del sistema y prolongar su vida útil (Li et al., 2017b). En particular, el control de la tasa de flujo de electrolito es el que ha cobrado mas relevancia por su probado impacto significativo sobre el rendimiento

electroquímico del sistema (Li et al., 2017a). Los estudios existentes se han centrado principalmente en la optimización en lazo abierto de la tasa de flujo con el objetivo de maximizar la eficiencia global. No obstante, para manejar perturbaciones del proceso, como las fluctuaciones en la corriente de carga y descarga, y las incertidumbres en los modelos, resulta necesario implementar estrategias de control basadas en realimentación (Li et al., 2017a). El diseño de este tipo de controladores requiere disponer de modelos dinámicos capaces de describir adecuadamente el comportamiento del sistema. En general, los modelos de VRFB presentan una naturaleza no lineal y muestran un acoplamiento significativo entre variables relevantes como la tensión, la corriente, el estado de carga (*State of Charge*, SoC) y la tasa de flujo del electrolito. Estas características dificultan el análisis y el diseño de controladores (Clemente et al., 2020).

En este contexto, surge la necesidad de contar con modelos dinámicos que capturen los principales fenómenos físicos del sistema sin incurrir en una complejidad excesiva que dificulte su utilización para el análisis y diseño de los controladores. Una herramienta que permite abordar este problema es la reducción de modelos mediante Interpolación de Momentos (IM), técnica que permite obtener representaciones de menor orden preservando propiedades dinámicas relevantes del sistema. Los métodos de IM han ganado particular interés frente a otras técnicas de reducción de modelos debido a su estabilidad numérica, permitiendo su aplicación a modelos de alto orden (Burohman et al., 2024; Rafiq and Bazaz, 2022). En el caso lineal, se basan en la interpolación de un conjunto de puntos en el plano complejo denominados momentos, los cuales se relaciona directamente con la respuesta en frecuencia del sistema dinámico. Además, permiten preservar propiedades físicas esenciales en el modelo de orden reducido, como la estabilidad entrada-salida (Faedo et al., 2018).

En este trabajo se realiza la reducción de orden de un modelo dinámico de un sistema VRFB orientada al diseño de controladores de tasa de flujo. El enfoque combina una reducción exacta basada en las leyes de conservación de masa y carga con la aplicación de IM sobre el modelo linealizado resultante. En particular, se emplea un generador de señales tipo escalón-rampa, mientras que la dinámica del modelo reducido se ajusta mediante un procedimiento de optimización basado en la respuesta en frecuencia, obteniéndose una representación lineal de segundo orden.

2. Reducción de modelos mediante el método de IM para sistemas lineales

Considere un sistema lineal, de entrada única y salida única, de tiempo continuo, descrito por ecuaciones de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (1)$$

con matrices constantes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Su función de transferencia asociada está dada por

$$G(s) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A). \quad (2)$$

Sea $s^* \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. El momento de orden $k \in \mathbb{N}_0$ del sistema en s^* se define como

$$\eta_k(s^*) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B] \Big|_{s=s^*}. \quad (3)$$

En particular, el momento de orden cero coincide con el valor de la función de transferencia evaluada en s^* : $\eta_0(s^*) = G(s^*)$.

La definición de momentos se formuló originalmente en el dominio de la frecuencia. No obstante, estos pueden caracterizarse también, para casi todo s^* , en el dominio del tiempo. En Astolfi (2010) se establece una correspondencia entre los momentos y la respuesta en estado estacionario de la salida del sistema interconectado que se muestra en la Fig. 2. Dicho sistema está compuesto por un generador de señales descrito por

$$\dot{\xi} = S\xi, \quad u' = L\xi, \quad \text{con: } \xi \in \mathbb{R}^r, \quad S \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad L \in \mathbb{R}^{1 \times r}, \quad (4)$$

cuya salida actúa como entrada del sistema definido en la ec. (1).

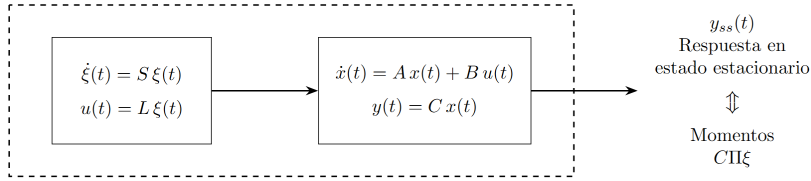


Figura 2. Diagrama de bloques del sistema interconectado, mostrando la relación entre respuesta en estado estacionario y momentos (Astolfi, 2010).

Bajo las siguientes hipótesis:

- La representación del sistema de la ec. (1) es mínima y corresponde a un sistema estable, es decir, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_{<0}$.
- La matriz S es no derogatoria ⁴ y satisface $\sigma(S) \subset \mathbb{C}_0$, $\sigma(A) \cap \sigma(S) = \emptyset$.
- El par (L, S) es observable.

Es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los momentos

$$\{\eta_0(s_1), \dots, \eta_{k_1}(s_1), \dots, \eta_0(s_N), \dots, \eta_{k_N}(s_N)\}$$

y la respuesta en estado estacionario de la salida del sistema interconectado de la Fig. 2, dada por

$$y_{ss} = C\Pi\xi,$$

donde $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times r}$ es la única solución de la ecuación de Sylvester

$$A\Pi + BL = \Pi S. \quad (5)$$

En este marco, el problema de reducción consiste en construir un modelo dinámico de orden $r \ll n$ cuya función de transferencia interpole los momentos

⁴ Una matriz es no derogatoria si su polinomio mínimo coincide con su polinomio característico.

del sistema de la ec. (1) en los autovalores de S . En particular, la familia de sistemas de orden r dada por

$$\dot{x}_r = (S - \Delta L)x'_r + \Delta u, \quad y = C\Pi x_r, \quad (6)$$

parametrizada por $\Delta \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ tal que $\sigma(S - \Delta L) \cap \sigma(S) = \emptyset$, caracteriza todos los sistemas de dimensión r cuya función de transferencia interpola los momentos del sistema de la ec. (1) en $\sigma(S)$.

En esta familia de modelos reducidos, la matriz Δ introduce un grado de libertad que puede utilizarse para imponer determinadas propiedades estructurales en el modelo reducido, tales como la asignación de autovalores, el grado relativo o la ubicación de ceros, entre otras, como se discute en (Astolfi, 2010).

3. Modelo dinámico del sistema de VRFB

Existen diversas formas de modelar el comportamiento de un sistema de VRFB, dependiendo de los componentes considerados y del nivel de detalle con el que se desee describir su dinámica. Un enfoque ampliamente utilizado en la literatura consiste en describir la evolución de las concentraciones de las especies de vanadio presentes en el sistema mediante ecuaciones de balance de masa. En esta representación, las concentraciones constituyen los estados dinámicos del sistema: $x = [c_2^c \ c_3^c \ c_4^c \ c_5^c \ c_2^t \ c_3^t \ c_4^t \ c_5^t]^\top$, donde los subíndices indican la especie y los superíndices distinguen entre celda (c) y tanque (t). Por su parte, la tasa de flujo de electrolito q se adopta como variable de control y la corriente I como una entrada exógena conocida. Bajo las hipótesis propuestas en Clemente (2025), el modelo dinámico queda descrito por la ec. (7):

- Los electrolitos están perfectamente mezclados y sus volúmenes permanecen constantes.
- Las concentraciones de las especies están uniformemente distribuidas en la celda y los tanques.
- Todas las celdas del *stack* son idénticas, por lo que pueden representarse mediante una única celda equivalente.
- La temperatura del electrolito permanece constante.
- La tasa de flujo del electrolito es la misma en ambos lados del sistema.
- No ocurren reacciones adicionales aparte de las reacciones redox y las de autodescarga, las cuales se consideran instantáneas y debidas únicamente al cruce de iones.

$$\dot{x} = \Gamma x + \Phi x q + \Upsilon I. \quad (7)$$

Cada termino de este modelo caracteriza un método de transporte de las especies activas. El primer término, está asociado a fenómenos indeseados de la batería y representa, en el modelo considerado en este trabajo, la contribución difusiva del fenómeno de cruce de iones de Vanadio (*Vanadium crossover*) a través de la membrana:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ con: } K = \frac{1}{w_e} \begin{bmatrix} -k_2 & 0 & -k_4 & -k_5 \\ 0 & -k_3 & 2k_4 & k_5 \\ 3k_2 & k_3 & -k_4 & 0 \\ -2k_2 & -k_3 & 0 & -k_5 \end{bmatrix}$$

El segundo termino describe el intercambio de electrolito entre el tanque y la celda:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\alpha \mathbb{I}_4 + \alpha \mathbb{I}_4 \\ +\beta \mathbb{I}_4 - \beta \mathbb{I}_4 \end{bmatrix}, \quad \text{con: } \alpha = \frac{1}{n^c v^c}, \beta = \frac{1}{v^t}$$

Por ultimo, el tercer término representa la interconversión electroquímica de especies asociada a la corriente. El signo de I distingue entre operación en carga y descarga.

$$\Upsilon = \frac{1}{v^c F} [-1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top.$$

Como variable de salida se considera la tensión de circuito abierto (*Open Circuit Voltage*, OCV) del *stack*, obtenida a partir de la ecuación de Nernst:

$$y = n^c E_{oc}^c = n^c \left[E^\circ + \frac{RT}{F} \ln \left(\frac{x_1 x_4}{x_2 x_3} \right) \right]$$

Este elección responde al objetivo de contribuir al diseño de estrategias de control de acuerdo con el enfoque planteado en artículos como Pugach et al. (2020); Li et al. (2017a), en los que se define una tensión de circuito abierto de referencia obtenida a partir de un proceso de optimización, dependiente de variables del sistema tales como la corriente y el *SoC*.

3.1. Simplificación del modelo mediante la aplicación de principios físicos de conservación

El modelo dinámico de la ec. (7) presenta una representación no mínima debido a la existencia de restricciones estructurales derivadas de leyes físicas de conservación. Estas restricciones inducen invariantes dinámicos que limitan la evolución del sistema a subvariedades invariantes del espacio de estados. Dado que las técnicas de IM requieren una representación mínima del sistema, resulta necesario reformular el modelo original utilizando dichos invariantes. En el caso de un sistema de VRFB, y bajo las hipótesis adoptadas, dos principios físicos permiten reducir el orden del modelo: la conservación de la masa total de vanadio y la conservación del estado de oxidación global (Clemente, 2025). Estas magnitudes vienen dadas por:

$$m = n^c v^c \sum_{i=2}^5 c_i^c + v^t \sum_{i=2}^5 c_i^t, \quad \zeta = \sum_{i=2}^5 z_i (n^c v^c c_i^c + v^t c_i^t) \quad (8)$$

donde z_i es el número de oxidación de cada especie. Cabe destacar que estas magnitudes se preservan estrictamente debido a la naturaleza cerrada del sistema, ya que los mecanismos de transporte únicamente redistribuyen las especies de vanadio entre los distintos compartimientos, mientras que las reacciones consideradas producen conversiones entre sus diferentes estados de oxidación sin alterar el balance global de oxidación.

Estas magnitudes permiten restringir los estados admisibles a la variedad afín $\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R}^8 : Hx = \Sigma\}$, expresando las leyes de conservación como:

$$Hx = \Sigma, \quad \text{con: } H = \begin{bmatrix} n^c v^c & n^c v^c & n^c v^c & n^c v^c & v^t & v^t & v^t & v^t \\ 2n^c v^c & 3n^c v^c & 4n^c v^c & 5n^c v^c & 2v^t & 3v^t & 4v^t & 5v^t \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} m \\ \zeta \end{bmatrix}$$

Dado que $\dim(\ker(H)) = 6$, únicamente seis estados son dinámicamente independientes, lo que permite obtener una reducción exacta del modelo original de orden ocho. Para ello, se introduce el vector de estados reducidos: $\tilde{x} = [c_2^c, c_3^c, c_4^c, c_5^c, c_2^t, c_3^t]^\top$, tal que todo estado admisible $x \in \mathbb{M}$ puede expresarse como

$$x = P\tilde{x} + W\Sigma, \quad (9)$$

donde $P \in \mathbb{R}^{8 \times 6}$ es una matriz cuyas columnas generan $\ker(H)$, y $W \in \mathbb{R}^{8 \times 2}$ es una solución particular tal que $HW = \mathbb{I}_2$. Las matrices P y W adoptan la siguiente forma:

$$P = \frac{1}{v^t} \begin{bmatrix} v^t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v^t \\ -3n^c v^c & -2n^c v^c & -n^c v^c & 0 & -3v^t & -2v^t \\ 2n^c v^c & n^c v^c & 0 & -n^c v^c & 2v^t & v^t \end{bmatrix}, \quad W = \frac{1}{v^t} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Derivando la transformación definida en la ec. (9), considerando que $\dot{\Sigma} = 0$, se tiene $\dot{x} = P\dot{\tilde{x}}$. Al sustituir en la ec. (7) resulta:

$$P\dot{\tilde{x}} = \Gamma(P\tilde{x} + W\Sigma) + \Phi(P\tilde{x} + W\Sigma)q + \Upsilon I. \quad (10)$$

Para despejar la dinámica reducida se aplica a ambos miembros el operador lineal $O : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^6$, inversa a izquierda de P . Una elección conveniente para dicho operador es $O = [\mathbb{I}_6 \ 0]$. Aplicando esta transformación se obtiene finalmente el modelo dinámico mínimo:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{\Gamma}\tilde{x} + \tilde{\Phi}\tilde{x}q + \tilde{\Theta}q + \tilde{\Upsilon}I, \quad (11)$$

donde: $\tilde{\Gamma} = O\Gamma P$, $\tilde{\Phi} = O\Phi P$, $\tilde{\Theta} = O\Phi W\Sigma$, $\tilde{\Upsilon} = O\Upsilon$

3.2. Linealización del sistema

Debido a la naturaleza no lineal del modelo descrito en la ec. (11), se considera su linealización en torno a un punto de operación caracterizado por un determinado SoC y un factor de conversión, siguiendo el enfoque propuesto en (Li et al., 2017a). Cabe señalar que dicho punto no corresponde a un equilibrio del sistema dinámico, ya que no existen estados de equilibrio físicamente admisibles que representen condiciones de operación electroquímicamente útiles (Clemente et al., 2020). En consecuencia, la definición del punto de operación se establece a partir de la relación entre el SoC en la celda y en el tanque:

$$SoC^c = \begin{cases} SoC^t + \gamma(1 - SoC^t), & \text{carga } (I_{op} < 0) \\ SoC^t(1 - \gamma), & \text{descarga } (I_{op} > 0) \end{cases}$$

donde $\gamma \in [0, 1]$ representa el factor de conversión, entendido como la fracción de especies electroactivas que reaccionan durante un único paso del electrolito a través de la celda (Parsegov et al., 2022).

Bajo la hipótesis de balance entre semiceldas, el estado correspondiente puede expresarse en función de SoC^c y SoC^t como:

$$\tilde{x}_{op} = c_v [SoC^c \ 1 - SoC^c \ 1 - SoC^c \ SoC^c \ SoC^t \ 1 - SoC^t]^\top$$

donde c_v representa la concentración total de vanadio.

Para que el sistema permanezca en $\tilde{x}_{op}$ bajo una corriente constante I_{op} , la tasa de flujo de electrolito q_{op} debería satisfacer

$$\tilde{I}\tilde{x}_{op} + \tilde{\Phi}\tilde{x}_{op}q_{op} + \tilde{\Theta}q_{op} + \tilde{Y}I_{op} = 0.$$

Este sistema está compuesto por seis ecuaciones escalares con una única incógnita q_{op} , y no admite solución. Por esta razón, se adopta un criterio de mínimos cuadrados, resolviendo

$$q_{op} = \arg \min_{q \in \mathbb{R}^+} \|A_q q - B_q\|_2, \text{ con: } A_q = \tilde{\Phi}\tilde{x}_{op} + \tilde{\Theta}, \ B_q = -(\tilde{I}\tilde{x}_{op} + \tilde{Y}I_{op})$$

La solución viene dada por la proyección ortogonal de B_q sobre el espacio generado por las columnas de A_q , resultando

$$q_{op} = (A_q^\top A_q)^{-1} A_q^\top B_q.$$

Dado que esta solución minimiza el residuo de la dinámica sin anularlo completamente, el punto de operación definido por $(\tilde{x}_{op}, q_{op})$ no constituye un equilibrio exacto del sistema. En consecuencia, la dinámica linealizada incluye un término constante asociado a dicho residuo. Para obtener esta representación, se introducen las variables incrementales: $\Delta\tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{x}_{op}$, $\Delta q = q - q_{op}$, $\Delta I = 0$. Sustituyendo en la ec. (11) se obtiene

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{I} + \tilde{\Phi}q_{op})\Delta\tilde{x} + (\tilde{\Phi}\tilde{x}_{op} + \tilde{\Theta})\Delta q + \tilde{\Phi}\Delta\tilde{x}\Delta q + E,$$

donde el término constante viene dado por $E = \tilde{I}\tilde{x}_{op} + \tilde{\Phi}\tilde{x}_{op}q_{op} + \tilde{\Theta}q_{op} + \tilde{Y}I_{op}$.

Para obtener una representación lineal, de la forma de la ec. (1), se desprecia el término de segundo orden $\tilde{\Phi}\Delta\tilde{x}\Delta q$, y se introducen los cambios de variable:

$$x' = \Delta\tilde{x} + A^{-1}E, \quad u' = \Delta q, \quad \text{con: } A = \tilde{I} + \tilde{\Phi}q_{op}, \ B = \tilde{\Phi}\tilde{x}_{op} + \tilde{\Theta} \quad (12)$$

donde se asume que la matriz A es invertible. Esta condición se satisface para valores típicos de los parámetros del sistema, para los cuales $\sigma(A) \in \mathbb{C}_{<0}$, lo que implica que $\det(A) \neq 0$.

Luego, para obtener una relación lineal entre los estados y la salida, se define la variable incremental de salida:

$$\Delta y = y - y_{op}, \quad \text{donde: } y_{op} = n^c \left[E^\circ + \frac{RT}{F} \ln \left(\frac{\tilde{x}_{1,op} \tilde{x}_{4,op}}{\tilde{x}_{2,op} \tilde{x}_{3,op}} \right) \right],$$

y, mediante una expansión de primer orden, se obtiene

$$\Delta y = C\Delta\tilde{x}, \quad \text{con: } C = n^c \frac{RT}{F} \left[\frac{1}{\tilde{x}_{1,op}} - \frac{1}{\tilde{x}_{2,op}} - \frac{1}{\tilde{x}_{3,op}} \frac{1}{\tilde{x}_{4,op}} \ 0 \ 0 \right].$$

Finalmente, definiendo $y' = \Delta y + CA^{-1}E$, se obtiene una representación lineal invariante en el tiempo de la forma

$$\dot{x}' = Ax' + Bu', \quad y' = Cx'. \quad (13)$$

4. Reducción por IM de un sistema de VRFB

Para ilustrar la aplicación del método de reducción de modelos por IM se considera el sistema de VRFB presentado en (Akter et al., 2019). Los parámetros utilizados se detallan en la Tab. 1.

Símbolo	Descripción	Valor
v^t, v^c	Volúmenes (tanque, celda)	200, 0.3 [L]
n^c	Celdas por <i>stack</i>	20
w_e	Ancho del electrodo	0.003 [m]
$k_{2,3,4,5}$	Coefs. de difusión ($V^{2+,3+,4+,5+}$)	$\{3.17, 0.72, 2.0, 1.25\} \cdot 10^{-8}$ [m/s]
E°	Potencial estándar	1.4 [V]
c_v	Concentración total	1.5 [mol/L]
T	Temperatura de la celda	298 [K]
F	Constante de Faraday	96485 [C/mol]
R	Constante de los gases	8.314 [J/(K · mol)]
m, ζ	Invariantes (masa, carga)	618, 2163 [mol]

Tabla 1. Parámetros del sistema de VRFB.

En primer lugar, se obtuvo una representación lineal del modelo de concentraciones del sistema de VRFB en torno a un punto de operación determinado siguiendo el procedimiento descrito en la Sec. 3.2. En particular, se consideró $SoC^t = 80\%$, $\gamma = 0.1$ e $I_{op} = 40$ A, correspondiente al 50 % de la corriente nominal. Estos valores permiten analizar la dinámica de la VRFB bajo condiciones de operación representativas a lo largo de un ciclo completo de descarga.

Sobre el modelo linealizado se aplicó la técnica de reducción por IM. Como se describió en la Sec. 2, el problema de reducción por IM consiste en la construcción del modelo dinámico de orden r con la estructura dada por la ec. (6), a partir de la selección de las matrices S y Δ como parámetros de diseño. Respecto a la matriz S , el criterio de elección tradicional consiste en elegir sus autovalores en función de las frecuencias de interés del sistema, de modo de interpolar los momentos en dichas frecuencias (Faedo et al., 2018). No obstante, existe un enfoque alternativo basado en la interpretación temporal de los momentos, derivada de su relación con la respuesta estacionaria del sistema interconectado mostrado en la Fig. 2. Desde esta perspectiva, la elección de S queda directamente asociada al tipo de señales de entrada cuya respuesta se desea reproducir exactamente.

En aplicaciones de control de VRFB (véase Li et al. (2017a); Akter et al. (2019)), las estrategias propuestas generan entradas que pueden aproximarse mediante combinaciones de escalones y rampas, para valores aproximadamente constantes de la corriente I . En consecuencia, se seleccionó

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad L = [1 \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times r}$$

lo que corresponde a un generador de señales tipo escalón-rampa. En esta elección, la matriz S es no derogatoria y el par (S, L) resulta observable.

Por su parte, la matriz Δ introduce un grado de libertad que puede utilizarse para imponer alguna estructura particular al modelo reducido. En este trabajo se emplea dicho grado de libertad para la asignación de los autovalores. Dado un conjunto deseado de autovalores $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, la matriz Δ que satisface

$\sigma(S - \Delta L) = \Lambda$ es única, debido a la observabilidad del par (L, S) . En particular, se adopta el enfoque propuesto en (Faedo, 2020), en el que los autovalores se determinan a través de un problema de optimización cuyo objetivo consiste en minimizar la distancia euclídea normalizada entre las respuestas en frecuencia del modelo lineal de orden completo definido por la ec. (13) y la del modelo de orden reducido dado por la ec (6). Para ello se considera un conjunto de frecuencias de interés $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^M$ y se determina Δ^{opt} resolviendo el siguiente problema de optimización no convexo:

$$\Delta^{opt} = \arg \min_{\Delta \in \mathbb{D}} \sum_{i=1}^M \frac{|G_r(j\omega_i, \Delta) - G(j\omega_i)|^2}{|G(j\omega_i)|^2}, \quad (14)$$

donde el conjunto admisible está dado por $\mathbb{D} = \{\Delta \in \mathbb{R}^{r \times 1} \mid \sigma(S - \Delta L) \subset \mathbb{C}_{<0}\}$, el cual garantiza que el modelo reducido obtenido sea estable.

El problema de optimización se resolvió numéricamente en el entorno *Matlab* utilizando la herramienta `fmincon`. Dado el carácter no convexo del problema, se ejecutaron múltiples optimizaciones locales a partir de distintas condiciones iniciales Δ_0 , con el fin de incrementar la probabilidad de alcanzar una solución cercana al óptimo global. Para su construcción, se definió una región del plano complejo donde se espera que se ubiquen los autovalores óptimos del modelo reducido. Dicha región se estableció a partir de los valores de referencia $\lambda_1^* = \Re(\min(\sigma(A)))$ y $\lambda_2^* = \Re(\max(\sigma(A)))$, quedando definida como:

$$\Lambda = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 1.4 \lambda_1^* \leq \lambda_1 \leq 0.6 \lambda_1^*, 1.4 \lambda_2^* \leq \lambda_2 \leq 0.6 \lambda_2^* \right\}$$

Posteriormente, mediante la función `sobolset` se generó una muestra de 50 candidatos dentro de la región Λ . Estos puntos se emplearon para construir las distintas condiciones iniciales Δ_0 utilizadas en el proceso de optimización. El conjunto de autovalores considerados se muestra en la Fig. 3.

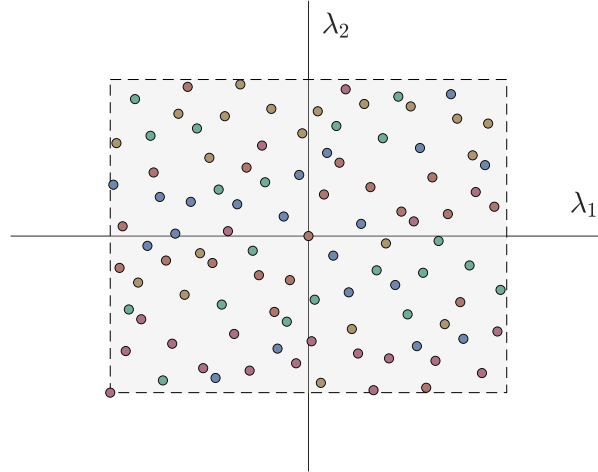


Figura 3. Conjunto de autovalores obtenidos mediante el método de muestreo de Sobol, utilizados para la construcción de las condiciones iniciales de la matriz Δ .

La resolución del problema de optimización condujo a un valor de la función objetivo de la ec. (14) de 0.12, obteniéndose al ubicar los autovalores del modelo reducido en -12.1×10^{-3} y -9.11×10^{-7} . La respuesta en frecuencia asociada al modelo reducido resultante se presenta en la Fig. 4, donde se la compara con la correspondiente al modelo lineal de orden completo.

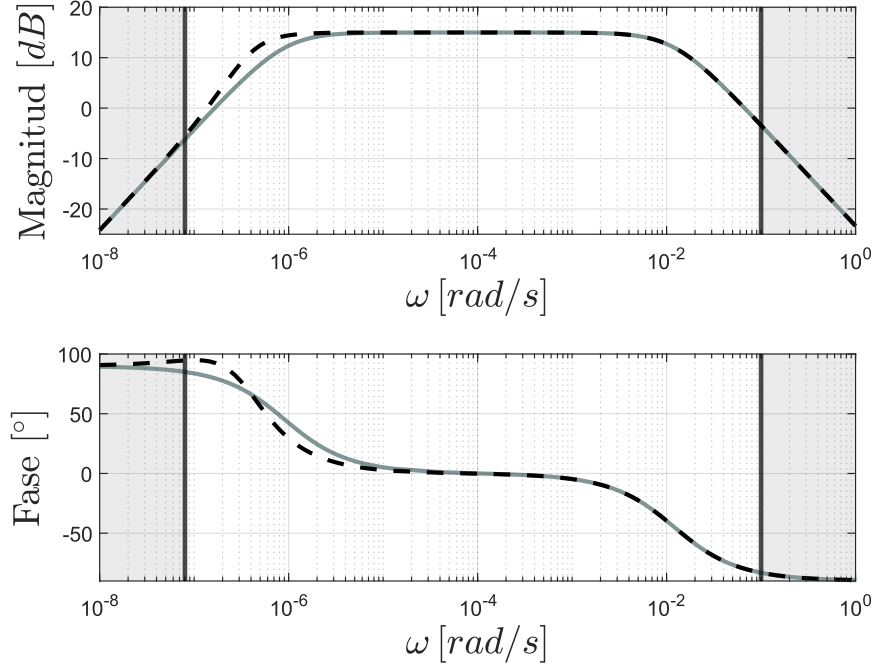


Figura 4. Respuesta en frecuencia del sistema linealizado de orden 6 (línea continua) y del modelo reducido de orden 2 (línea discontinua). El área blanca indica el rango de frecuencias $\Omega = [8 \times 10^{-8}, 0.1] rad/s$ considerado en el problema de optimización.

La Fig. 4 muestra una buena concordancia entre ambas respuestas en la mayor parte del rango de frecuencias considerado. La principal diferencia se concentra en la zona de bajas frecuencias, donde el modelo completo presenta una cuasi cancelación entre un par de polos complejos conjugados y un cero simple. En el modelo reducido, este comportamiento se aproxima mediante un único polo real, lo que explica la discrepancia observada.

A continuación, se evaluó el desempeño del modelo reducido en el dominio temporal. Para ello, se mantuvo la corriente en su valor de operación ($\Delta I = 0$) y se aplicó una perturbación escalón sobre la tasa de flujo, de amplitud igual al 15 % de su valor operación. La respuesta obtenida se comparó con las correspondientes al modelo lineal de orden completo y al modelo no lineal original, tal como se muestra en la Fig. 5.

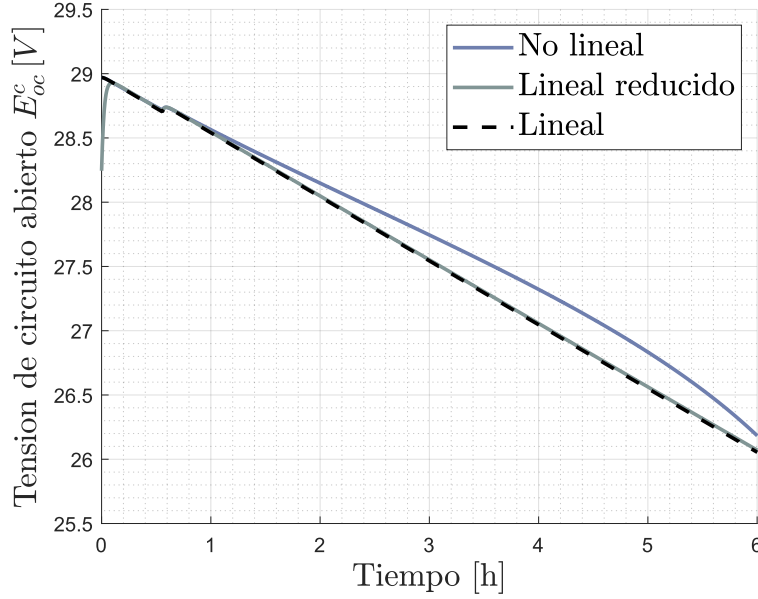


Figura 5. Respuesta temporal del modelo reducido (gris sólido), del modelo lineal de orden completo (negro discontinuo) y del modelo no lineal (azul sólido), ante una variación escalón del 15 % en la tasa de flujo respecto de su valor de operación q_{op} .

La Fig. 5 muestra que el modelo reducido reproduce adecuadamente la dinámica del sistema lineal a lo largo de todo el intervalo considerado, correspondiente a un ciclo completo de descarga. La diferencia respecto del modelo no lineal se debe principalmente a la marcada no linealidad de la salida, introducida por la dependencia logarítmica entre las concentraciones y la tensión de circuito abierto. Como es esperable, las aproximaciones lineales describen con mayor precisión el comportamiento del sistema en las cercanías del punto de operación, mientras que el error aumenta a medida que la trayectoria evoluciona hacia regiones más alejadas. No obstante, para el caso analizado, el error relativo máximo respecto del modelo no lineal es 2.5 %, lo que evidencia la capacidad del modelo reducido para capturar la dinámica del sistema ante pequeñas variaciones de la tasa de flujo y corrientes de operación constantes. Este nivel de precisión respalda su utilización en tareas de análisis y diseño de estrategias de control. En aplicaciones que requieran una representación más precisa sobre un rango operativo amplio, podría recurrirse a esquemas de linealización multipunto considerando distintos valores de I_{op} y SoC^t , como se propone en (Li et al., 2017a).

Con el fin de evaluar la sensibilidad del procedimiento frente a variaciones del punto de operación, se repitió el proceso de linealización y reducción para distintos valores representativos del SoC, tanto en condiciones de carga como de descarga. En cada caso se consideró un intervalo operativo de $\pm 20\%$ alrededor del punto de linealización y se aplicó una perturbación escalón del 15 % sobre la tasa de flujo. El desempeño de los modelos reducidos se cuantificó mediante la

comparación de sus respuestas temporales con las del modelo no lineal original, empleando como indicadores el error cuadrático medio (ECM) y el error relativo máximo (ERM). Los resultados obtenidos se presentan en la Tab. 2.

SOC	Carga ($I_{op} = -40 A$)		Descarga ($I_{op} = 40 A$)	
	ECM	ERM [%]	ECM	ERM [%]
0.3 (0.1–0.5)	1.0×10^{-3}	0.36	0.2×10^{-3}	0.05
0.7 (0.5–0.9)	0.3×10^{-3}	0.06	1.1×10^{-3}	0.11

Tabla 2. Errores de aproximación del modelo reducido respecto del modelo no lineal para distintos puntos de operación.

Conclusiones

En este trabajo se aplicó la técnica de reducción de modelos por IM al modelo dinámico de concentraciones de una VRFB. A partir de un modelo no lineal de orden ocho basado en balances de masa de las especies electroactivas, se obtuvo una representación mínima de orden seis mediante el empleo de invariantes físicos asociados a la conservación de masa y carga. Sobre dicha representación se construyó un modelo lineal en torno a un punto de operación y, posteriormente, se obtuvo un modelo reducido de segundo orden utilizando técnicas de IM.

La selección de la matriz S se realizó a partir de la interpretación temporal de los momentos, empleando un generador de señales tipo escalón-rampa representativo de las variaciones de la tasa de flujo utilizadas en estrategias de control de VRFB. Por su parte, el grado de libertad asociado a la matriz Δ se utilizó para asignar los autovalores del modelo reducido mediante la resolución de un problema de optimización orientado a minimizar la diferencia entre las respuestas en frecuencia del modelo completo y del modelo reducido.

Los resultados obtenidos muestran que el modelo reducido preserva adecuadamente las características dinámicas del modelo lineal de orden completo, reproduciendo con buena precisión tanto la respuesta en frecuencia como la evolución temporal. Asimismo, la comparación con el modelo no lineal evidencia que la aproximación mantiene un elevado nivel de precisión para desviaciones moderadas de la tasa de flujo y corrientes de operación constantes. El análisis realizado para distintos estados de carga, tanto en condiciones de carga como de descarga, mostró errores relativos máximos inferiores al 0.4, %, lo que indica una baja sensibilidad del procedimiento frente a variaciones del punto de operación dentro de los rangos analizados. En conjunto, los resultados obtenidos respaldan el uso de modelos reducidos basados en IM como una herramienta efectiva para el análisis y diseño de estrategias de control orientadas que actúen sobre la tasa de flujo en sistemas VRFB.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido realizado con el apoyo de la Facultad de Ingeniería - UNLP, CONICET y el Proyecto CyTEB II 2025-24155785-GDEBA, CICPBA-PROINGED, Prov. Buenos Aires. Asimismo, este trabajo fue financiado parcialmente por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, la Agencia y del Fondo Europeo de Desarrollo Regional bajo los proyectos: DECODER (PID2024-158394OB-C22) y AVANTE (PDC2025-165204-C22).

Bibliografia

- Akter, M. P. et al. (2019). Optimal charging of vanadium redox flow battery with time-varying input power. *Batteries*.
- Aluko, A. and Knight, A. (2023). A review on vanadium redox flow battery storage systems for large-scale power systems application. *IEEE Access*, PP.
- Astolfi, A. (2010). Model reduction by moment matching for linear and nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Bogdanov, S. et al. (2023). Dynamic modeling of vanadium redox flow batteries: Practical approaches, their applications and limitations. *Journal of Energy Storage*.
- Burohman, A. M. et al. (2024). From data to reduced-order models via moment matching. *Systems Control Letters*.
- Clemente, A. (2025). *Modeling and Control of a Vanadium Redox Flow Battery*. Phd thesis, Universitat Politècnica de Catalunya.
- Clemente, A. et al. (2020). Voltage h control of a vanadium redox flow battery. *Electronics*.
- Faedo, N. (2020). *Optimal control and model reduction for wave energy systems: A moment-based approach*. PhD thesis, National University of Ireland Maynooth.
- Faedo, N. et al. (2018). Moment-matching-based identification of wave energy converters: the iswec device. *IFAC-PapersOnLine*. 11th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems, Robotics, and Vehicles CAMS 2018.
- Li, Y. et al. (2017a). Control of electrolyte flow rate for the vanadium redox flow battery by gain scheduling. *Journal of Energy Storage*.
- Li, Y. et al. (2017b). Studies on optimal charging conditions for vanadium redox flow batteries. *Journal of Energy Storage*.
- Parsegov, S. et al. (2022). Analysis of flow factor control strategy in vanadium redox flow batteries. *IFAC-PapersOnLine*. 11th IFAC Symposium on Control of Power and Energy Systems CPES 2022.
- Pugach, M. et al. (2020). Output feedback control of electrolyte flow rate for vanadium redox flow batteries. *Journal of Power Sources*.
- Puleston, T. et al. (2022). Modelling and estimation of vanadium redox flow batteries: A review. *Batteries*.
- Rafiq, D. and Bazaz, M. A. (2022). Model order reduction via moment-matching: A state of the art review. *Archives of Computational Methods in Engineering*.
- Skyllas-Kazacos, M. et al. (1986). New all-vanadium redox flow cell. *Journal of The Electrochemical Society*.