

# A flow-based formulation for the multi-product Production Routing Problem with time-windows and heterogeneous fleet

Lucas Porporatto<sup>1</sup>, Yanina Fumero<sup>1</sup>, and Gabriela Corsano<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Desarrollo y Diseño (INGAR), CONICET-UTN,  
Avellaneda 3657, S3002GJC, Santa Fe, Argentina

{lporporatto, yfumero, gcorsano}@santafe-conicet.gov.ar

**Abstract.** The Production Routing Problem (PRP) reflects the ongoing effort to integrate different supply chain echelons, offering substantial cost reductions through the simultaneous optimization of production, inventory, and distribution activities. Despite its relevance, the literature often overlooks practical application features such as multi-product environments, heterogeneous vehicle fleets, backordering, and time-window constraints. To address this gap, a Mixed-Integer Linear Programming (MILP) formulation based on a two-commodity flow approach is developed, eliminating subtours without exponential constraint growth and improving computational efficiency. The model was implemented in Python using Gurobi 13.0 and validated through an illustrative case study and a set of 81 benchmark instances. Results demonstrate its effectiveness in reducing costs while meeting strict operational requirements. The computational results reveal that the optimality gap is significantly influenced by the number of customers and time periods, whereas variations in the number of products and vehicles show no such effect. This work provides a robust tool to bridge the gap between theoretical models and real-world industrial applications, offering a comprehensive framework for complex decision-making.

**Keywords:** supply chain integration, mixed-integer linear programming, simultaneous optimization, computational experiments

## Formulación basada en flujos para el Problema de Producción y Ruteo de múltiples productos con ventanas de tiempo y flota heterogénea

**Resumen** El Problema de Producción y Ruteo (PRP) surge de los esfuerzos por integrar distintos eslabones de las cadenas de suministro, ofreciendo reducciones sustanciales de costos mediante la optimización simultánea de las actividades de producción, inventario y distribución. A

pesar de su relevancia, la literatura suele omitir características propias de la aplicación práctica, tales como los entornos multiproducto, flotas de vehículos heterogéneas, pedidos pendientes (backorders) y restricciones de ventanas de tiempo. Para abordar esta brecha, se propone una formulación de Programación Lineal Mixta-Entera (MILP) basada en un enfoque de flujo de dos mercancías que elimina subtours sin generar un crecimiento exponencial de las restricciones, mejorando así la eficiencia computacional. El modelo se implementó en Python utilizando Gurobi 13.0 y se validó mediante un caso ilustrativo y un conjunto de 81 instancias. Los resultados demuestran la eficacia del modelo para optimizar los costos, cumpliendo simultáneamente con las exigencias operativas. Asimismo, los resultados computacionales revelan que el gap de optimalidad está influenciado significativamente por el número de clientes y períodos de tiempo, mientras que las variaciones en la cantidad de productos y vehículos no muestran dicho efecto. Este trabajo proporciona una herramienta robusta para reducir la brecha entre los modelos teóricos y las aplicaciones industriales reales, ofreciendo un marco integral para la toma de decisiones complejas.

**Palabras claves:** integración de la cadena de suministros, programación mixta-entera lineal, optimización simultánea, experimentos computacionales

## 1. Introducción

El mercado global cada vez más competitivo ha forzado a las cadenas de suministro modernas hacia la búsqueda constante y simultánea de eficiencia operativa, reducción de costos y excelencia en el servicio brindado. Tradicionalmente, la gestión de las cadenas de suministro se ha realizado mediante procesos de toma de decisiones jerárquicos, donde las actividades de producción, inventario y distribución se optimizan de forma secuencial e independiente (Adulyasak et al., 2014). Sin embargo, este enfoque fragmentado suele conducir a un desempeño subóptimo del sistema en su conjunto, debido a que no logra capturar las complejas interdependencias entre dichas actividades (Archetti & Speranza, 2016). El reconocimiento de estas limitaciones ha impulsado un cambio de paradigma hacia enfoques de planificación integrada que optimizan simultáneamente múltiples decisiones, permitiendo ahorros sustanciales de costos y un mejor rendimiento operativo.

El Problema de Producción y Ruteo (PRP, por sus siglas en inglés) ejemplifica este enfoque integrado, representando la complejidad que conlleva la gestión de la cadena de suministro. El PRP ha atraído gran atención en la comunidad debido a la evidencia de ahorros en costos que oscilan entre el 3 % y el 20 % en comparación con los enfoques secuenciales tradicionales (Chandra & Fisher, 1994). Más recientemente, un meta-análisis realizado por Hrabec et al. (2022) estimó una reducción de costos esperada de aproximadamente el 11 % al emplear

una estrategia integrada de planificación. Además, las implementaciones prácticas han arrojado resultados comparables, mostrando, por ejemplo, reducción del 10 % en los costos logísticos de la empresa Frito-Lay (Çetinkaya et al., 2009) y ahorros de hasta 4.5 millones de dólares en la compañía Kellogg's (Brown et al., 2001), sólo por mencionar algunos casos. Estos ejemplos ilustran el potencial de estas metodologías para generar beneficios significativos en contextos industriales.

El PRP surge en el contexto de la política de gestión de inventario conocida como *Vendor Managed Inventory* (VMI), donde el fabricante asume no sólo las responsabilidades propias de producción, sino también el reabastecimiento del inventario del cliente, siendo el encargado de su gestión (Archetti & Speranza, 2016). Bajo este marco, el PRP se caracteriza como una integración entre el problema de dimensionamiento de lotes (*capacitated lot-sizing*) y el de Inventario y Ruteo (*inventory-routing problems*), heredando así la complejidad *NP-hard* de ambas instancias (Adulyasak et al., 2015; Coelho et al., 2014). Específicamente, en los PRP se debe determinar de forma simultánea y para múltiples períodos de tiempo: (i) los cronogramas y cantidades de producción para cada producto; (ii) los niveles de inventario tanto en la fábrica como en los clientes; (iii) el cronograma y las cantidades a entregar a los clientes; y (iv) las rutas específicas para la distribución con su correspondiente asignación de vehículos.

En un trabajo reciente, Awasthi et al. (2025) afirman que a pesar del creciente interés en los PRP, la mayoría de los estudios siguen centrados en variantes simplificadas que no capturan plenamente la complejidad de las aplicaciones reales. Como se destaca en diferentes revisiones (Adulyasak et al., 2015; Awasthi et al., 2025; Díaz-Madroño et al., 2015), persisten brechas significativas en cuanto a variantes que incorporan de forma simultánea características propias de la aplicación práctica. En este sentido, son escasos los estudios que abordan de forma conjunta la gestión de pedidos pendientes (*backordering*), flotas de vehículos heterogéneas y restricciones de tiempo (*time-windows constraints*) en los clientes dentro de entornos de producción multiproducto.

La incorporación de estas características en los modelos PRP es esencial para reducir la brecha entre los modelos académicos y la aplicación industrial. La ruptura de stock en los clientes, por ejemplo, puede deberse a múltiples motivos: priorización de ciertos productos por sobre otros al momento de su producción, límites en la capacidad de la planta tanto para almacenar como para producir, retrasos en el reaprovisionamiento a los clientes debido a las limitaciones del vehículo en su capacidad de carga, baja capacidad de almacenamiento del cliente para las demandas que debe afrontar, etc. Estas rupturas deben ser costeadas dado que impactan negativamente tanto en la operación diaria (mediante la atención de reclamos, órdenes extraordinarias, etc), como así también en el servicio brindado al cliente. Es por ello que la incorporación de las *backorders* a los modelos PRP es de suma importancia para lograr representaciones más realistas de la vinculación entre las empresas.

Paralelamente, mientras que los modelos simplificados de PRP a menudo asumen una flota homogénea con horas de operación ilimitadas (Adulyasak et

al., 2014; Manousakis et al., 2022; Ruokokoski et al., 2010; Schenekemberg et al., 2021), tales supuestos rara vez se mantienen en la práctica. Las cadenas de suministro reales dependen de flotas heterogéneas para atender diversos perfiles de clientes y restricciones de accesibilidad urbana. Koç et al. (2016) muestran que omitir la heterogeneidad de la flota de transporte en modelos de ruteo suele llevar a una sobreestimación de los costos de distribución, ya que no se logra explotar el equilibrio entre los menores costos variables de los vehículos grandes y los menores costos fijos de los más pequeños.

Además, la sincronización de las entregas a los clientes en un horario acordado, al igual que las características previamente mencionadas, representa otra importante dimensión en las cadenas de suministro. Aunque los modelos PRP simplificados a menudo asumen que las entregas pueden realizarse en cualquier momento durante el período de planificación, la práctica industrial muestra que los clientes imponen estrictas ventanas de tiempo para la recepción de mercancías (Qiu et al., 2018).

Si bien existen trabajos que han incorporado parcialmente las características mencionadas (Fortes et al., 2022; Neves-Moreira et al., 2019; Vahdani et al., 2017), hasta el momento no existe antecedente en la literatura en donde se hayan contemplado todas de forma simultánea. El presente trabajo intenta reducir este gap, proponiendo una formulación basada en programación lineal mixta-entera (MILP) que extienda el modelo de flujo de dos mercancías (*two-commodity flow*) presentado por Manousakis et al. (2022) para integrar la planificación de la producción multiproducto, el ruteo de flota heterogénea y pedidos pendientes, considerando ventanas de tiempo en los clientes.

## 2. Descripción del problema y formulación matemática

La variante del PRP abordada en este trabajo se define sobre un horizonte de planificación finito y discreto  $\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$ . Sea  $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, n, n+1\}$  el conjunto de nodos, donde el nodo 0 representa la planta de producción,  $\mathcal{N}_c = \{1, \dots, n\}$  denota el conjunto de clientes, y el nodo  $n+1$  es una copia ficticia de la planta utilizado para representar el regreso de los vehículos hacia ella. Ésta suministra a los clientes un conjunto de productos  $\mathcal{P} = \{1, \dots, P\}$ , donde cada cliente  $i \in \mathcal{N}_c$  tiene una demanda  $d_{ip}^t \geq 0$  del producto  $p \in \mathcal{P}$  en el periodo  $t \in \mathcal{T}$ . En cada periodo, la planta puede producirlos sujeto a una capacidad de producción  $C_p$ , incurriendo en un costo fijo (*setup*)  $c_p^s$  y un costo unitario  $c_p^u$ . Los productos pueden mantenerse en inventario en los nodos  $i \in \mathcal{N}_c^0 = \{0\} \cup \mathcal{N}_c$ , los cuales cuentan con una capacidad de almacenamiento máxima denotada por  $L_{ip}$  con un costo unitario de mantenimiento asociado  $c_{ip}^h$ . Al inicio del horizonte, tanto la planta como los clientes poseen un stock inicial  $I_{ip}^0$ . Si la demanda del producto  $p$  para el cliente  $i$  no puede ser satisfecha durante el periodo  $t$ , la cantidad no satisfecha se transforma en *backorder*, la cual tiene un costo unitario de penalización  $c_{ip}^b$ .

La distribución se realiza utilizando una flota de vehículos heterogénea  $\mathcal{V} = \{1, \dots, V\}$ , donde cada vehículo  $v \in \mathcal{V}$  tiene una capacidad de transporte máxima

$C_v$ . En cada periodo  $t$ , los vehículos realizan viajes sobre un grafo dirigido  $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , donde  $\mathcal{A} = \{(i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : i \neq j, (i, j) \notin \{(0, n+1), (n+1, 0)\}\}$  es el conjunto de arcos. Cada viaje debe originarse en la planta (nodo 0) y terminar en su copia (nodo  $n+1$ ). El despacho del vehículo  $v$  en el periodo  $t$  incurre en un costo fijo de activación  $c_v^f$ , mientras que atravesar el arco  $(i, j)$  implica un costo de transporte  $c_{ij} > 0$  y un tiempo de viaje  $a_{ij} > 0$ . Se asume simetría en la red de distribución, de tal manera que  $c_{ij} = c_{ji}$ ,  $a_{ij} = a_{ji} \forall (i, j) \in \mathcal{A}$ . Adicionalmente, cada cliente  $i \in \mathcal{N}_c$  establece una ventana de tiempo  $[tw_i^s, tw_i^e]$  para ser atendido por los vehículos, donde debe también considerarse el tiempo de servicio  $s_i$  para la descarga de productos. Las variables de decisión para la formulación se definen de la siguiente manera:

|                          |                                                                                                                                                                            |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y_p^t \in \{0, 1\}$     | Variable binaria de producción; es igual a 1 si el producto $p$ es producido en el periodo $t$ , y 0 en caso contrario.                                                    |
| $pr_p^t \geq 0$          | Cantidad del producto $p$ producida en el periodo $t$ .                                                                                                                    |
| $I_{ip}^t \geq 0$        | Nivel de inventario del producto $p$ en el nodo $i \in \mathcal{N}_c^0$ al finalizar el periodo $t$ .                                                                      |
| $b_{ip}^t \geq 0$        | Cantidad pendiente de entrega ( <i>backorder</i> ) del producto $p$ para el cliente $i \in \mathcal{N}_c$ al final del periodo $t$ .                                       |
| $z_{iv}^t \in \{0, 1\}$  | Variable binaria de visita; es igual a 1 si el nodo $i$ es visitado por el vehículo $v$ en el periodo $t$ , y 0 en caso contrario.                                         |
| $q_{ipv}^t \geq 0$       | Cantidad de producto $p$ entregada al cliente $i$ por el vehículo $v$ en el periodo $t$ .                                                                                  |
| $x_{ijv}^t \in \{0, 1\}$ | Variable binaria de ruteo; es igual a 1 si el vehículo $v$ atraviesa el arco $(i, j) \in \mathcal{A}$ en el periodo $t$ , y 0 en caso contrario.                           |
| $f_{ijv}^t \geq 0$       | Variable de flujo que representa la carga del vehículo en el arco $(i, j)$ y la capacidad residual en el arco de retorno $(j, i)$ para el vehículo $v$ en el periodo $t$ . |
| $w_{iv}^t \geq 0$        | Variable que indica el tiempo de inicio del servicio al cliente $i$ por parte del vehículo $v$ en el periodo $t$ .                                                         |

En base a las definiciones anteriores, el PRP del presente es formulado como un MILP de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \sum_{t \in \mathcal{T}} \left( \sum_{p \in \mathcal{P}} \left( c_p^s y_p^t + c_p^u pr_p^t + \sum_{i \in \mathcal{N}_c^0} c_{ip}^h I_{ip}^t + \sum_{i \in \mathcal{N}_c} c_{ip}^b b_{ip}^t \right) \right. \\
& \left. + \sum_{v \in \mathcal{V}} \left( c_v^f \sum_{j \in \mathcal{N}_c} x_{0jv}^t + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ijv}^t \right) \right) \quad (1)
\end{aligned}$$

$$pr_p^t \leq C_p y_p^t \quad \forall p \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} \quad (2)$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} pr_p^t \geq \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{N}_c} d_{ip}^t - \sum_{i \in \mathcal{N}_c^0} I_{ip}^0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (3)$$

$$I_{0p}^t = I_{0p}^{t-1} + pr_p^t - \sum_{v \in \mathcal{V}} \sum_{i \in \mathcal{N}_c} q_{ipv}^t \quad \forall p \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} \quad (4)$$

$$I_{ip}^t = I_{ip}^{t-1} + \sum_{v \in \mathcal{V}} q_{ipv}^t - d_{ip}^t + b_{ip}^t - b_{ip}^{t-1} \quad \forall p \in \mathcal{P}, i \in \mathcal{N}_c, t \in \mathcal{T} \quad (5)$$

$$I_{ip}^t \leq L_{ip} \quad \forall p \in \mathcal{P}, i \in \mathcal{N}_c^0, t \in \mathcal{T} \quad (6)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} x_{ijv}^t = z_{iv}^t \quad \forall v \in \mathcal{V}, i \in \mathcal{N}, i \neq j, t \in \mathcal{T} \quad (7)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} x_{ijv}^t = z_{jv}^t \quad \forall v \in \mathcal{V}, j \in \mathcal{N}, j \neq i, t \in \mathcal{T} \quad (8)$$

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} z_{iv}^t \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{N}_c, t \in \mathcal{T} \quad (9)$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} q_{ipv}^t \geq z_{iv}^t \quad \forall i \in \mathcal{N}_c, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (10)$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} q_{ipv}^t \leq z_{iv}^t C_v \quad \forall i \in \mathcal{N}_c, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (11)$$

$$f_{ijv}^t + f_{jiv}^t = C_v (x_{ijv}^t + x_{jiv}^t) \quad \forall i, j \in \mathcal{A} : i < j, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (12)$$

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{N} \\ j \neq i}} f_{ijv}^t = C_v z_{iv}^t - \sum_{p \in \mathcal{P}} q_{ipv}^t \quad \forall v \in \mathcal{V}, i \in \mathcal{N}_c, t \in \mathcal{T} \quad (13)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_c} f_{0jv}^t = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{i \in \mathcal{N}_c} q_{ipv}^t \quad \forall v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (14)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_c} f_{i(n+1)v}^t = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (15)$$

$$w_{jv}^t \geq w_{iv}^t + s_i + a_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ijv}^t) \quad \forall v \in \mathcal{V}, (i, j) \in \mathcal{A}, t \in \mathcal{T} \quad (16)$$

$$w_{iv}^t \geq tw_i^s z_{iv}^t \quad \forall v \in \mathcal{V}, (i, j) \in \mathcal{A}, t \in \mathcal{T} \quad (17)$$

$$w_{iv}^t \leq (tw_i^e - s_i) z_{iv}^t \quad \forall v \in \mathcal{V}, (i, j) \in \mathcal{A}, t \in \mathcal{T} \quad (18)$$

$$x_{ijv}^t + x_{jiv}^t \leq (z_{iv}^t + z_{jv}^t)/2 \quad \forall i, j \in \mathcal{A} : i < j, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (19)$$

$$x_{ijv}^t \leq (z_{iv}^t + z_{jv}^t)/2 \quad \forall i, j \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (20)$$

$$f_{ijv}^t \leq C_v z_{jv}^t \quad \forall i, j \in \mathcal{A} : i \neq j, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (21)$$

$$f_{ijv}^t \leq C_v z_{iv}^t \quad \forall i, j \in \mathcal{A} : i \neq j, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (22)$$

$$y_p^t \in \{0, 1\} \quad \forall p \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} \quad (23)$$

$$x_{ijv}^t \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (24)$$

$$z_{iv}^t \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \mathcal{N}, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (25)$$

$$pr_p^t \geq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} \quad (26)$$

$$I_{ip}^t \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}_c^0, p \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} \quad (27)$$

$$b_{ip}^t \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}_c, p \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} \quad (28)$$

$$q_{ipv}^t \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}_c, p \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (29)$$

$$f_{ijv}^t \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T} \quad (30)$$

La función objetivo (1) minimiza el costo total a lo largo del horizonte de planificación, el cual abarca los costos de producción (*setup* y unitarios), inventario, backorders y transporte, comprendiendo este último costos fijos por el despacho de vehículos y costos variables por las distancias recorridas. La restricción (2) impone la activación de la variable binaria  $y_p^t$  siempre que se decida producir el producto  $p$  en el periodo  $t$ , limitando la cantidad a la capacidad de la planta  $C_p$ . Se asume que los pedidos pendientes son cero al inicio y final del horizonte de tiempo, al igual que Brahimi y Aouam (2016), por lo cual todas las demandas de los clientes deben ser satisfechas dentro del horizonte. En este sentido, la restricción (3) impone un límite inferior a la producción total de cada producto  $p$ , garantizando que la producción acumulada alcance, al menos, la demanda neta acumulada.

Las ecuaciones (4) y (5) representan el balance de inventario para la planta y los clientes  $i \in \mathcal{N}_c$ , respectivamente, y la restricción (6) limita el inventario a una capacidad máxima  $L_{ip}$ . Esta definición del inventario se alinea con la política denominada "nivel máximo" (*Maximum Level*), en donde las entregas a los clientes poseen como limitante el no excederse de su capacidad de almacenamiento, sin necesidad de completarlo (como sí exige la política *Order-up to Level*).

En cuanto a los aspectos de transporte del modelo, las restricciones (7), (8) y (9), en conjunto, establecen que cada nodo puede recibir como máximo una vi-

sita por período, prohibiendo así las entregas fraccionadas (*split deliveries*). Las restricciones (10) y (11) exigen que, si un nodo es visitado, como mínimo se le entregue una unidad y como máximo la capacidad del vehículo, respectivamente. Las ecuaciones (12)–(15), provenientes de formulaciones tipo *two-commodity flow*, restringen el movimiento de las mercaderías, implicando la eliminación de sub-tours y el cumplimiento de los límites de capacidad de los vehículos  $C_v$ . Específicamente, (12) obliga a que la suma de la carga y la capacidad residual de un vehículo en un arco sea igual a su capacidad total (cuando dicho arco es atravesado). La restricción (13) reduce la carga en la cantidad exacta entregada a cada cliente visitado. La restricción (14) inicializa el flujo de salida desde el nodo central con la cantidad total cargada en el vehículo, mientras que la restricción (15) evita cualquier flujo de entrada al nodo sumidero ficticio, forzando la entrega de toda la mercadería previamente cargada en el vehículo al inicio del viaje.

Además de las restricciones de enrutamiento anteriores, se debe cumplir con las ventanas de tiempo de los clientes. Para ello, la restricción (16) establece el inicio del servicio a cada cliente según los tiempos de viaje, servicio y la secuencia de recorrido del vehículo. El parámetro  $M_{ij} = a_{ij} + tw_i^e$  permite relajar, de forma controlada, la relación entre las variables de inicio de servicio  $w$  en caso de que el vehículo  $v$  no viaje desde el nodo  $i$  hacia  $j$ . Luego, las ecuaciones (17) y (18) acotan el inicio del servicio a cada cliente a sus correspondientes límites en caso de ser efectivamente visitados. Finalmente, las inecuaciones (19)–(22) refuerzan la formulación, ajustando especialmente la relajación lineal del modelo MILP al momento de su resolución. Las restricciones (23)–(30) definen el dominio de las variables del modelo, por lo que la formulación completa (1)–(30) proporciona una representación integral del PRP multiproducto, incorporando los requisitos de backorders, flota heterogénea y cumplimiento de ventanas de tiempo en los clientes.

### 3. Resultados computacionales

Esta sección muestra de forma detallada la aplicación de la formulación propuesta y sus resultados. Incluye el análisis de un caso de estudio pequeño, con el objetivo de explorar y validar los valores obtenidos, seguido por una evaluación de la performance del enfoque propuesto a través de la resolución de un conjunto de instancias de diferentes tamaños y características.

El modelo fue codificado utilizando Python 3.13.11 y las instancias fueron resueltas mediante Gurobi 13.0.0. La estación de trabajo cuenta con un procesador Intel(R) Core™ i7-10700F, CPU @ 2.90GHZ, 32GB de RAM y sistema operativo Windows 10.

#### 3.1. Ejemplo ilustrativo

Con el objetivo de mostrar detalladamente los resultados que se obtienen a partir del modelo propuesto, se resuelve una instancia que consiste en una cadena de suministro con un nodo central y once clientes finales, los cuales demandan

tres productos diferentes en tres periodos de tiempo, típicamente días. Se cuenta con una flota de dos vehículos, cada uno con capacidades y costos de transporte específicos. Con estos conjuntos, y luego de evitar la generación de arcos infactibles (por ventanas de tiempo), el modelo alcanza las 2.289 variables, de la cuales 1.428 son continuas, 861 son binarias, y un total de 4.800 restricciones. El tiempo de resolución fue de 41 segundos para lograr un gap del 0 %.

La solución obtenida indica que todos los productos (P1, P2 y P3) deben producirse tanto en el primero como en el segundo período, mientras que en el periodo final solo se elaboran P1 y P2. El balance de inventario en el nodo central, representado por la ecuación 4, se encuentra detallado en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Balance de inventario en el nodo central

| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{T}$ | Inventario al inicio | Producción | Envío |
|---------------|---------------|----------------------|------------|-------|
| <b>P1</b>     | <b>T1</b>     | 51                   | 147        | 198   |
|               | <b>T2</b>     | 0                    | 166        | 166   |
|               | <b>T3</b>     | 0                    | 119        | 119   |
| <b>P2</b>     | <b>T1</b>     | 58                   | 180        | 207   |
|               | <b>T2</b>     | 31                   | 213        | 244   |
|               | <b>T3</b>     | 0                    | 133        | 133   |
| <b>P3</b>     | <b>T1</b>     | 51                   | 178        | 197   |
|               | <b>T2</b>     | 32                   | 187        | 194   |
|               | <b>T3</b>     | 25                   | 0          | 25    |

En lo que respecta a los clientes finales, sólo dos de ellos (nodos N3 y N6) presentan backorders, mientras que los restantes nodos cumplen con las demandas a tiempo. El balance de inventario de los clientes, representado por la ecuación 5, se muestra en la Tabla 2 para los nodos anteriormente mencionados, incluido el nodo 9 (N9). La columna  $I_{ip}^t(b_{ip}^t)$  refleja el nivel de inventario (o backorder) al inicio del período de tiempo, siendo el inventario (o backorder) al final del período el resultado del balance entre este, la demanda ( $d_{ip}^t$ ) y la suma de las órdenes arribadas ( $\sum_{v \in \mathcal{V}} q_{ipv}^t = \bar{q}_{ip}^t$ ). Al igual que en el inventario del nodo central, se puede observar que al finalizar el horizonte de tiempo el inventario remanente es cero. Este patrón se repite en todos los clientes debido a que la función objetivo lleva a no producir unidades de más.

En relación a los resultados de transporte, la Tabla 3 resume los clientes visitados por cada vehículo en cada viaje, las cantidades totales entregadas de cada producto y la Capacidad Ociosa (CO). Considerando que las capacidades son de 277 y 327 unidades en total para los vehículos V1 y V2, respectivamente, se puede observar la elevada utilización de los vehículos, viajando al 100 % de su capacidad en prácticamente la totalidad de los viajes.

Por último, el cumplimiento de las ventanas de tiempo de los clientes se ilustra con la Figura 1, la cual representa el viaje realizado por el vehículo V1

**Tabla 2.** Balance de inventario en nodos 3, 6 y 9

| $\mathcal{N}_c$ | $\mathcal{P}$ | <b>P1</b>            |            |                  | <b>P2</b>            |            |                  | <b>P3</b>            |            |                  |
|-----------------|---------------|----------------------|------------|------------------|----------------------|------------|------------------|----------------------|------------|------------------|
|                 |               | $I_{ip}^t(b_{ip}^t)$ | $d_{ip}^t$ | $\bar{q}_{ip}^t$ | $I_{ip}^t(b_{ip}^t)$ | $d_{ip}^t$ | $\bar{q}_{ip}^t$ | $I_{ip}^t(b_{ip}^t)$ | $d_{ip}^t$ | $\bar{q}_{ip}^t$ |
| <b>N3</b>       | <b>T1</b>     | 2                    | 4          | 2                | 4                    | 9          | 4                | 3                    | 7          | 4                |
|                 | <b>T2</b>     | 0                    | 0          | 0                | (1)                  | 36         | 39               | 0                    | 22         | 22               |
|                 | <b>T3</b>     | 0                    | 0          | 0                | 2                    | 21         | 19               | 0                    | 0          | 0                |
| <b>N6</b>       | <b>T1</b>     | 0                    | 0          | 0                | 18                   | 36         | 0                | 0                    | 0          | 0                |
|                 | <b>T2</b>     | 0                    | 14         | 32               | (18)                 | 0          | 38               | 0                    | 12         | 0                |
|                 | <b>T3</b>     | 18                   | 18         | 0                | 20                   | 20         | 0                | 18                   | 18         | 0                |
| <b>N9</b>       | <b>T1</b>     | 18                   | 36         | 49               | 24                   | 48         | 68               | 0                    | 0          | 18               |
|                 | <b>T2</b>     | 31                   | 13         | 0                | 44                   | 0          | 0                | 18                   | 0          | 0                |
|                 | <b>T3</b>     | 18                   | 18         | 0                | 44                   | 44         | 0                | 18                   | 18         | 0                |

**Tabla 3.** Detalle de los resultados de transporte

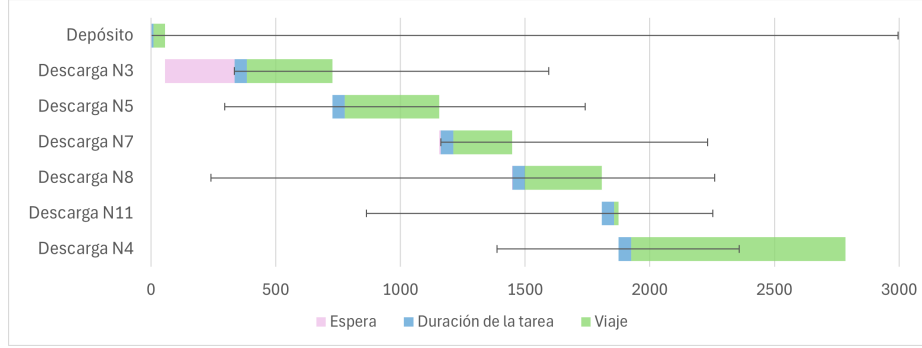
| $\mathcal{V}$ | $\mathcal{T}$ | Recorrido                                                                                                          | $q_p$     |           |           | CO |
|---------------|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|----|
|               |               |                                                                                                                    | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> |    |
| <b>V1</b>     | <b>T1</b>     | 0 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 7 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 11 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 0                 | 84        | 101       | 90        | 2  |
|               | <b>T2</b>     | 0 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 7 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 0                                                  | 82        | 108       | 87        | 0  |
|               | <b>T3</b>     | 0 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 7 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 11 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 0 | 119       | 133       | 25        | 0  |
| <b>V2</b>     | <b>T1</b>     | 0 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 9 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 0                 | 114       | 106       | 107       | 0  |
|               | <b>T2</b>     | 0 $\rightarrow$ 6 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 0                                 | 84        | 136       | 107       | 0  |

durante el último período de tiempo. Tal y como se observa, las ventanas de tiempo (representadas por las líneas horizontales) se cumplen para todos los clientes, así como también se respeta la ventana del nodo central, al regresar a tiempo desde el último cliente visitado (N4).

### 3.2. Evaluación de la formulación

Hasta donde conocemos, no existe en la literatura un conjunto de datos que contemple todas las características abordadas en este trabajo. Por este motivo, se decide construir una serie nueva de instancias sobre las cuales evaluar la formulación propuesta. A diferencia de las ya existentes en la literatura (Archetti et al., 2011; Boudia et al., 2007; Fortes et al., 2022), éstas cuentan con ventanas de tiempo en los clientes, múltiples productos y flota de vehículos heterogénea entre sus principales características.

Un total de 81 nuevos ejemplos se han generado con diferentes valores en sus principales conjuntos y parámetros. Específicamente, las variaciones se enfocaron en el número de clientes  $\mathcal{N}_c \in \{15, 25, 35\}$ , el número de períodos de tiempo  $\mathcal{T} \in \{4, 7, 10\}$ , el número de productos  $\mathcal{P} \in \{3, 4, 5\}$  y el número de vehículos



**Figura 1.** Secuencia de visitas del vehículo V1 en el período 3

disponibles  $\mathcal{V} \in \{3, 4, 5\}$ . A modo de referencia, el problema de menor tamaño cuenta con 7.176 variables y 16.824 restricciones, mientras que el de mayor tamaño alcanza las 52.850 variables y 133.650 restricciones. Puede accederse al detalle de cada instancia a través del siguiente link <https://tinyurl.com/PRPwTW>, encontrándose también los valores obtenidos en su resolución.

La Tabla 4 presenta el detalle de los gaps obtenidos para cada una de las diferentes instancias resueltas con un tiempo de cómputo fijado en 1800 segundos (30 minutos). Esta tabla permite ver no sólo la capacidad de resolución de la formulación propuesta, sino también el efecto que genera el cambio de tamaño de los conjuntos más importantes del problema. En particular, la última columna indica el promedio de gaps para cada combinación de clientes y períodos de tiempo. Como es de esperarse, existe un claro impacto en el gap de resolución al variar estos conjuntos. A medida que se incrementa el tamaño de uno u otro, el gap también aumenta. A modo de ejemplo, el gap promedio para las instancias con  $\mathcal{T} = 7$  es mayor a las de  $\mathcal{T} = 4$ , independientemente del número de clientes presentes en la instancia.

Si bien no se ha demostrado optimalidad en ninguna de las soluciones, la obtención de soluciones factibles en problemas de estas características y dimensiones a través de formulaciones exactas no suele encontrarse en la literatura. A modo de ejemplo, la formulación exacta propuesta por Fortes et al. (2022), referenciada como VINX y enfocada en problemas PRP similares al del presente trabajo, no fue capaz de encontrar solución factible en el 31 % de las instancias propuestas luego de 6 horas de resolución, siendo éstas de dimensiones cercanas a las aquí resueltas. En este sentido, alcanzar no sólo soluciones factibles en todas las instancias, sino también gaps menores al 10 % en el 81 % de ellas y con un tiempo máximo de 30 minutos, demuestra la capacidad del enfoque propuesto en resolver problemas PRP de estas características.

**Tabla 4.** Reporte de gaps, en porcentaje, para las diferentes instancias.

| $\mathcal{N}_c$ | $\mathcal{T}$ | $\mathcal{P}$<br>$\mathcal{V}$ | <b>3</b>   |            |            | <b>4</b>   |            |            | <b>5</b>   |            |            | <b>Prom.</b> |
|-----------------|---------------|--------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------|
|                 |               |                                | <b>3</b>   | <b>4</b>   | <b>5</b>   | <b>3</b>   | <b>4</b>   | <b>5</b>   | <b>3</b>   | <b>4</b>   | <b>5</b>   |              |
| <b>15</b>       | 4             |                                | 0.3        | 2.3        | 0.5        | 0.9        | 0.1        | 2.1        | 0.7        | 0.4        | 0.8        | <b>0.9</b>   |
|                 | 7             |                                | 2.2        | 1.7        | 0.8        | 2.2        | 1.6        | 0.7        | 1.1        | 0.6        | 1.2        | <b>1.4</b>   |
|                 | 10            |                                | 1.8        | 2.4        | 3.8        | 4.2        | 2.7        | 5.3        | 2.6        | 1.8        | 4.0        | <b>3.2</b>   |
| <b>25</b>       | 4             |                                | 4.0        | 4.9        | 1.5        | 2.0        | 1.0        | 1.5        | 5.6        | 2.9        | 2.1        | <b>2.8</b>   |
|                 | 7             |                                | 4.8        | 5.3        | 6.7        | 5.3        | 2.3        | 6.5        | 6.0        | 8.1        | 5.6        | <b>5.6</b>   |
|                 | 10            |                                | 12.4       | 10.5       | 6.6        | 6.4        | 5.2        | 9.0        | 9.4        | 4.2        | 7.1        | <b>7.9</b>   |
| <b>35</b>       | 4             |                                | 5.1        | 3.0        | 2.3        | 7.3        | 4.4        | 7.6        | 6.6        | 2.5        | 3.3        | <b>4.7</b>   |
|                 | 7             |                                | 9.3        | 9.1        | 13.3       | 13.7       | 8.5        | 15.3       | 12.5       | 7.6        | 19.6       | <b>12.1</b>  |
|                 | 10            |                                | 9.3        | 31.1       | 17.6       | 11.8       | 30.9       | 13.2       | 16.5       | 28.3       | 31.5       | <b>21.1</b>  |
| <b>Prom.</b>    |               |                                | <b>5.5</b> | <b>7.8</b> | <b>5.9</b> | <b>6.0</b> | <b>6.3</b> | <b>6.8</b> | <b>6.8</b> | <b>6.3</b> | <b>8.4</b> | <b>6.6</b>   |

#### 4. Conclusiones

El presente trabajo propone un modelo de programación matemática capaz de abordar un PRP con aspectos que comúnmente se encuentran en la práctica y no en la literatura. Específicamente, se consideran aquellos casos de múltiples productos, en donde el nodo central cuenta con una flota heterogénea de vehículos, los clientes exigen la entrega de productos dentro de ventanas de tiempos, y se gestiona la posibilidad de backorders. Para ello, se desarrolla un modelo mixto entero lineal basado en flujos, el cual tiene como objetivo la minimización de los costos totales de la cadena de suministro: producción, inventario, backorders y ruteo.

Existen varios aspectos a destacar del trabajo: por un lado, la generación de un modelo capaz de contemplar todas las características mencionadas en simultáneo, acercándolo así a la práctica real de la gestión de cadenas de suministro. Por otro lado, esta formulación basada en flujos evita la construcción de cortes de subtours para la parte del ruteo, como se presenta habitualmente en los trabajos de la literatura, haciendo más eficiente el enfoque. De esta forma, el crecimiento del modelo se ve menos afectado por el incremento del número de clientes, tendiendo a generar entonces problemas más pequeños por resolver. Por último, pero no por ello menos importante, la creación y resolución de un conjunto de instancias, disponibilizadas en <https://tinyurl.com/PRPwTW>, permiten no sólo validar el resultado obtenido en este trabajo, sino también brindan a la comunidad un punto de partida para la evaluación y comparación de nuevas metodologías que se propongan para la resolución de problemas PRP con las características descritas.

Los resultados presentados en la Sección 3.1 muestran que el modelo es capaz de representar de forma efectiva todas las características presentadas, logrando suplir las demandas de los clientes en las ventanas de tiempo exigidas, sin exceder

las capacidades del sistema, tanto de producción, como de almacenamiento y transporte. Por otro lado, la Sección 3.2 muestra que el enfoque propuesto es capaz de resolver instancias de diferentes tamaños y características en tiempos de cómputo razonables, considerando la complejidad del problema abordado.

En lo que respecta a posibles trabajos futuros, es clara la necesidad de profundizar en estrategias de resolución más eficientes que permitan, en primera instancia, reducir el gap en los ejemplos de mayor tamaño, y de ser posible, demostrar luego la optimalidad de las soluciones. Para ello, algunas de las múltiples alternativas a explorar son: la utilización de métodos heurísticos para la resolución del problema, estrategias de descomposición (típicamente separando las etapas de producción y ruteo), o también la implementación de mateheurísticas, siendo éste un método que combina los dos anteriores: heurísticas y programación matemática. Por último, la resolución de las instancias generadas mediante modelos ya existentes en la literatura permitiría además poder comparar de forma más precisa la efectividad de la formulación presentada.

## Referencias

- Adulyasak, Y., Cordeau, J.-F., & Jans, R. (2014). Optimization-based adaptive large neighborhood search for the production routing problem. *Transportation science*, 48(1), 20-45.
- Adulyasak, Y., Cordeau, J.-F., & Jans, R. (2015). The production routing problem: A review of formulations and solution algorithms. *Computers & Operations Research*, 55, 141-152.
- Archetti, C., Bertazzi, L., Paletta, G., & Speranza, M. G. (2011). Analysis of the maximum level policy in a production-distribution system. *Computers & Operations Research*, 38(12), 1731-1746.
- Archetti, C., & Speranza, M. G. (2016). The inventory routing problem: the value of integration. *International Transactions in Operational Research*, 23(3), 393-407.
- Awasthi, S., Verma, P., & Narkhede, B. E. (2025). A comprehensive review of integrated production and routing problems in supply chain. *Benchmarking: An International Journal*, 1-30.
- Boudia, M., Louly, M. A. O., & Prins, C. (2007). A reactive GRASP and path relinking for a combined production–distribution problem. *Computers & Operations Research*, 34(11), 3402-3419.
- Brahimi, N., & Aouam, T. (2016). Multi-item production routing problem with backordering: a MILP approach. *International Journal of Production Research*, 54(4), 1076-1093.
- Brown, G., Keegan, J., Vigus, B., & Wood, K. (2001). The Kellogg company optimizes production, inventory, and distribution. *Interfaces*, 31(6), 1-15.
- Çetinkaya, S., Üster, H., Easwaran, G., & Keskin, B. B. (2009). An integrated outbound logistics model for Frito-Lay: Coordinating aggregate-level production and distribution decisions. *Interfaces*, 39(5), 460-475.

- Chandra, P., & Fisher, M. L. (1994). Coordination of production and distribution planning. *European journal of operational research*, 72(3), 503-517.
- Coelho, L. C., Cordeau, J.-F., & Laporte, G. (2014). Thirty years of inventory routing. *Transportation science*, 48(1), 1-19.
- Díaz-Madroñero, M., Peidro, D., & Mula, J. (2015). A review of tactical optimization models for integrated production and transport routing planning decisions. *Computers & Industrial Engineering*, 88, 518-535.
- Fortes, A., Camargo, R., Muniz, L. R., de Souza Lima, F. M., & dos Reis Costa, F. (2022). Efficient matheuristics to solve a rich production-routing problem. *Computers & Industrial Engineering*, 171, 108369.
- Hrabec, D., Hvattum, L. M., & Hoff, A. (2022). The value of integrated planning for production, inventory, and routing decisions: A systematic review and meta-analysis. *International Journal of Production Economics*, 248, 108468.
- Koç, Ç., Bektaş, T., Jabali, O., & Laporte, G. (2016). Thirty years of heterogeneous vehicle routing. *European Journal of Operational Research*, 249(1), 1-21.
- Manousakis, E. G., Kasapidis, G. A., Kiranoudis, C. T., & Zachariadis, E. E. (2022). An infeasible space exploring matheuristic for the production routing problem. *European journal of operational research*, 298(2), 478-495.
- Neves-Moreira, F., Almada-Lobo, B., Cordeau, J.-F., Guimarães, L., & Jans, R. (2019). Solving a large multi-product production-routing problem with delivery time windows. *Omega*, 86, 154-172.
- Qiu, Y., Qiao, J., & Pardalos, P. M. (2018). Formulations and branch-and-cut algorithms for production routing problems with time windows. *Journal of Global Optimization*, 70(4), 669-694.
- Ruokokoski, M., Solyali, O., Cordeau, J.-F., Jans, R., & Süral, H. (2010). *Efficient formulations and a branch-and-cut algorithm for a production-routing problem*. Citeseer.
- Schenekemberg, C. M., Scarpin, C. T., Pecora Jr, J. E., Guimarães, T. A., & Coelho, L. C. (2021). The two-echelon production-routing problem. *European journal of operational research*, 288(2), 436-449.
- Vahdani, B., Niaki, S., & Aslanzade, S. (2017). Production-inventory-routing coordination with capacity and time window constraints for perishable products: Heuristic and meta-heuristic algorithms. *Journal of cleaner production*, 161, 598-618.