

Tournament Alliances

Ariel Arbiser, Lucas Cantore

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
arbiser@dc.uba.ar, lucascantore@gmail.com

Resumen In game theory, classical matrix models do not always capture cooperative dynamics within competitive contexts, nor do they account for possible pre-play negotiations. This work proposes a framework for modeling the formation of alliances among players in a tournament, building on the idea of pre-play negotiation. These links between players impact the payoff matrices of each round of the tournament, which are generated through a redistribution of gains among members of the same alliance. A language of offers for the pre-play stage is defined, through which such alliances can be formed. Additionally, the study examines, within a reduced setting, how these alliances influence players' strategies. Finally, it presents a way to represent alliances through a variant of the transformation model, which modifies payoff matrices based on offers between players. This result suggests new possibilities for analyzing tournaments and investigating how pre-play agreements affect their outcomes.

Keywords: alliance, game theory, GOI-transformation, pre-play negotiation, tournament

Alianzas en ámbito de torneos

Resumen En teoría de juegos, los modelos matriciales clásicos no siempre capturan dinámicas de cooperación en contextos competitivos como tampoco posibles negociaciones previas al juego. Este trabajo propone un marco para modelar la formación de alianzas entre jugadores de un torneo, trabajando sobre la idea de negociación previa. Estos vínculos entre jugadores impactan en las matrices de pago de cada ronda del torneo, generadas a partir de una redistribución de las ganancias entre los miembros de una misma alianza. Se define un lenguaje de ofertas para el pre-juego mediante el cual es posible formar dichas alianzas. Además, se estudia en un espacio reducido cómo estas influyen en las estrategias de los jugadores, y finalmente se exhibe una forma de representar alianzas a través de una variante del modelo de transformaciones que alteran las matrices de pago a partir de ofertas entre jugadores. Este resultado sugiere nuevas posibilidades para analizar torneos e investigar cómo los acuerdos previos inciden en sus resultados.

Keywords: alianza, negociación en el pre-juego, teoría de juegos, torneo, transformación GOI

1. Introducción

A lo largo de los años se han propuesto diversos enfoques de cooperación en juegos Blume et al., 2017 Segal, 1999. Entre ellos, los modelos de negociación previa Goranko, 2022a Goranko, 2022b Goranko y Turrini, 2016 extienden los juegos en forma normal mediante una fase preliminar en la que los jugadores intercambian ofertas vinculantes de utilidad. Estas inducen transformaciones en las matrices de pagos modelando la cooperación dentro de un marco no cooperativo y permiten analizar propiedades de eficiencia y equidad. La literatura distingue entre ofertas condicionales e incondicionales y estudia su efecto sobre los equilibrios y la eficiencia. Asimismo, dichas transformaciones admiten una caracterización algebraica, lo que permite analizar sistemáticamente su impacto sobre la estructura estratégica. En conjunto, estos resultados proporcionan un marco formal para estudiar la influencia de acuerdos previos y su relación con modelos clásicos de negociación.

El objetivo de este trabajo es analizar un caso particular de la negociación previa al juego adaptada a torneos, ofreciendo una herramienta que permita a los jugadores negociar sobre la puntuación del total ganado en el torneo, y generando un escenario donde los jugadores pueden negociar y redistribuir sus ganancias en función de “alianzas”. Un desarrollo más detallado se encuentra en Cantore, 2025.

El esquema de torneo a analizar consta de dos etapas. En la primera, el pre-juego, los jugadores en simultáneo pueden enviar peticiones de alianza a otros jugadores o aceptar las recibidas. El resultado de esta etapa se reflejará en las matrices de pagos de acuerdo con las alianzas formadas. La segunda etapa consiste en las iteraciones del torneo, en que los jugadores compiten en base a las matrices resultantes y acumulan puntajes. Primero definimos un tipo de alianza y observamos su impacto en las matrices de pago. Se examina luego una extensión del lenguaje de ofertas introducido en Goranko, 2022b, y se introduce una variante con ofertas multiplicativas que, junto con la extensión resultan particularmente significativas. La motivación es construir un marco que permita abordar de manera más general los fenómenos de cooperación en juegos estratégicos. Los resultados obtenidos buscan ampliar la comprensión de las dinámicas de negociación y alianzas, así como sentar bases para futuros desarrollos. La originalidad de nuestra presentación reviste en la definición de las alianzas, la extensión del lenguaje de ofertas con carácter aditivo y la definición de ofertas multiplicativas que permiten representar la distribución de pagos con respecto a las alianzas (Teorema 2).

1.1. Preliminares

- **Jugadores:** Son los agentes que participan en el juego.
- **Estrategias:** Conjunto de acciones o decisiones disponibles para cada jugador. Para cada jugador i , denotamos por S_i el conjunto (finito) de estrategias disponibles. Una estrategia $s_i \in S_i$ determina la acción que el jugador tomará en el juego.

- **Funciones de pago:** Asignan un valor numérico a cada combinación posible de estrategias de todos los jugadores. Representan las recompensas, utilidades o costos que recibe cada jugador como consecuencia del resultado del juego.
- **Juego en forma normal:** $G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$, donde: $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores; S_i es el conjunto de estrategias disponibles para el jugador i ; $u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ es la *función de pago* de i , que asigna un valor real al perfil de estrategias $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, donde $s_j \in S_j$ es la estrategia elegida por el jugador j .
- **Oferta previa al juego (Preplay offer):**¹ Compromiso unilateral realizado por un jugador antes de que comience la partida, en el cual promete transferir parte de su pago a otro jugador si este último elige una estrategia específica, con notación: $A \xrightarrow{\delta|B_i} B$. A es el jugador que realiza la oferta, B es el jugador que la recibe, B_i es la estrategia de B que condiciona la oferta, δ es el pago de A a B si B elige la estrategia B_i .
- **Transformaciones POI (primitive offer-induced transformation) (resp. GOI, general offer-induced transformation):** Transformaciones sobre una matriz de pagos mediante una oferta previa al juego (resp., mediante una secuencia de transformaciones POI).

Se considerarán torneos para juegos iterados finitos, donde cada jugador acumula puntos en los enfrenamientos contra cada uno de los demás, y el ganador será quien al finalizar logre la mayor cantidad de puntos.

2. Etapa de pre-juego (pre-game)

El punto de partida consiste en extender las ofertas presentadas en Goranko y Turrini, 2016, las cuales se formalizan mediante objetos sintácticos denominados *ofertas*, y que adoptan la forma: $J_1 \xrightarrow{\delta|C} J_2$ donde J_1 le ofrece δ puntos a J_2 si este toma la decisión C , modificando la matriz de pagos.²

En este contexto, las ofertas deben representar una propuesta para la formación de alianzas entre los distintos jugadores que participan en el torneo.

2.1. Alianzas

Una alianza es un conjunto de jugadores que redistribuyen entre ellos los puntos ganados en el torneo. Uno de esos jugadores se identifica como el líder y suele tener cualidades extras en la etapa de pre-juego. Se sigue la idea de que

¹ En esta definición usada en Goranko, 2022b nos inspiramos para definir otro tipo de oferta.

² A lo largo del artículo, las ofertas relacionadas a alianzas van a considerarse del tipo “pase lo que pase”, es decir, que no son condicionales a que el que recibe la oferta tome cierta acción. Se podría considerar a cada oferta como la unión de ofertas condicionales de cada decisión posible, pero esto complicaría la lectura (y posiblemente requeriría mayor análisis).

cada jugador arranca como único integrante de una alianza propia y siendo el líder de esta. Un líder puede mediante ofertas proponer a otros jugadores que se unan a su alianza, si no forman ya parte de la misma. Un jugador puede aceptar unirse a otra alianza si su alianza actual tiene cardinal 1. Si un jugador acepta una oferta y se une a otra alianza, deja de tener el rol de líder y todas las ofertas que había hecho para que se unieran a su alianza quedan anuladas.

Abordamos las **alianzas parciales**, en las cuales cada jugador da una proporción X de sus ganancias y recibe una proporción Y de lo que genera su alianza. La forma de comunicar las ofertas la denotaremos con: $J_i \xrightarrow{X/Y} J_j$. Se requieren ciertas restricciones:

- $X \geq 0$ $Y \geq 0$, i.e. no tiene sentido una ganancia o distribución “negativa”.
- $X \leq 1$, es decir, lo que aporta cada jugador no supera lo que gana.
- $Y \leq 1$, es decir, lo que recibe cada jugador no supera el total recaudado.
- $\sum Y_i = 1$, es decir, no se redistribuyen más de lo que genera la alianza ni quedan puntos en la alianza que no se redistribuyen.
- La suma de los Y_j de las ofertas que no fueron aceptadas (u ofertadas) es la proporción que le corresponde recibir al líder de la alianza.
- El líder de la alianza siempre aporta 1.

2.2. Impacto en las matrices de pago

Observar que las decisiones de un jugador que forma parte de una alianza repercuten en las ganancias de los demás miembros de la misma, dado que una fracción de sus puntos (positivos o negativos) se redistribuye. Las matrices de pago deberán expandirse para que reflejen la puntuación de los participantes directos de cada partida así como las de los miembros de cada alianza.

Sea por ejemplo un torneo con 3 jugadores sin alianzas, y se enfrentan los jugadores 1 y 2. Tomemos como ejemplo la (bi)matriz de la izquierda:

	C_2	D_2
C_1	(3,3)	(0,5)
D_1	(5,0)	(1,1)

la cual será reescrita
como

	C_2	D_2
C_1	(3,3,0)	(0,5,0)
D_1	(5,0,0)	(1,1,0)

En la nueva matriz, los pagos se representan mediante una N -tupla ordenada, donde las componentes representan en orden los pagos a todos los jugadores numerados de 1 a N . La transformación de la matriz en el caso de alianzas parciales se fundamenta en el mecanismo de redistribución de los pagos. En este tipo de alianzas, cada jugador transfiere una proporción de sus ganancias a la alianza y, a su vez, recibe una proporción (no necesariamente idéntica) del total acumulado por la misma. En consecuencia, por cada puntuación obtenida por un jugador, se descuenta la fracción que éste aporta a la alianza y, posteriormente, se redistribuye entre los integrantes de la misma la parte que corresponde a cada uno según lo establecido.

Sean: N la cantidad de jugadores, numerados desde 1 hasta N ; $i, j \in [1, N], i \neq j$ los índices de dos jugadores que jugarán entre sí; a_i y a_j las ganancias de i y j

j resp.; P_k y R_k resp. las proporciones de lo aportado y recibido por k a/de su alianza.

Para cada elemento de la matriz de pago, se aplica la transformación

$$(a_i, a_j) \longrightarrow (a'_1, a'_2, \dots, a'_i, \dots, a'_j, \dots, a'_N)$$

Sea Al_k la alianza del jugador k , podemos definir U_k como la cantidad de puntos que recauda en una jugada determinada de dicha alianza:

$$U_k = \begin{cases} P_i \cdot a_i & si \quad Al_k = Al_i \wedge Al_i \neq Al_j \\ P_j \cdot a_j & si \quad Al_k = Al_j \wedge Al_i \neq Al_j \\ P_i \cdot a_i + P_j \cdot a_j & si \quad Al_k = Al_i = Al_j \\ 0 & si \quad Al_k \neq Al_i \wedge Al_k \neq Al_j \end{cases}$$

Entonces: $\forall k, 1 \leq k \leq N$

$$a'_k = \begin{cases} R_k \cdot U_k & si \quad k \neq i \wedge k \neq j \\ a_i - P_k \cdot a_i + R_k \cdot U_k & si \quad k = i \\ a_j - P_k \cdot a_j + R_k \cdot U_k & si \quad k = j \end{cases}$$

3. Transformaciones y representaciones

En esta sección estudiamos propiedades relacionadas con las ofertas introducidas en Goranko, 2022a, Goranko, 2022b y Goranko y Turrini, 2016, en donde se da un marco para modelar interacciones estratégicas entre jugadores a través de un lenguaje de ofertas que permite representar compromisos asumidos en la etapa inicial.

El lenguaje hasta el momento se estructura a partir de dos tipos de ofertas. El primero es $A \xrightarrow{\delta|B_i} B$ oferta incondicional (de acá en adelante, oferta elemental) que modifica una fila o una columna de la matriz de pagos en caso de ser aceptada. La idea es que el jugador A ofrece una ganancia δ (adicional) al jugador B en caso de que este juegue B_i .

El segundo tipo es $A \xrightarrow{\delta_1|B_i \mid \delta_2|A_j} B$ oferta condicional, donde en caso de aceptada se debe modificar los pagos en una fila y en una columna. La idea es que el jugador A ofrece δ_1 al jugador B si este juega B_i , pero condicional a que B le ofrezca δ_2 a A si este juega A_j .

Una oferta condicional puede ser pensada como 2 ofertas incondicionales en simultáneo. Es decir, aceptar $A \xrightarrow{\delta_1|B_i \mid \delta_2|A_j} B$ es equivalente a haber aceptado simultáneamente las siguientes 2 ofertas incondicionales:

$$\left[\begin{array}{l} A \xrightarrow{\delta_1|B_i} B \\ B \xrightarrow{\delta_2|A_j} A \end{array} \right]$$

De acuerdo con Goranko y Turrini, 2016, las ofertas se realizan de manera secuencial, alternándose los jugadores que las emiten. Precedemos la secuencia de ofertas elementales por un corchete a izquierda cuando estas son simultáneas, considerándola como una transacción: se aplican todas o ninguna. De aceptarse, se aplican secuencialmente de arriba hacia abajo.

Def. 1 *La aplicación de una oferta elemental (resp. secuencia de ofertas elementales) a una matriz M es la matriz M' que resulta de la redistribución de los puntos de M en función de dicha oferta elemental (resp. secuencia). Notación: $(M)A \xrightarrow{\delta|B_i} B(M')$ (resp. $(M)S(M')$).*

Def. 2 Equivalencia: Diremos que dos secuencias de ofertas $(O_1, O_2, \dots, O_k)$ y $(O'_1, O'_2, \dots, O'_m)$ son equivalentes $(\equiv)$ si y solo si, aplicadas a una misma matriz inicial M_1 , devuelven la misma matriz final M_2 .

$$\text{Prop. 1} \quad \left[\begin{array}{c} A \xrightarrow{\delta_1|B_i} B \\ B \xrightarrow{\delta_2|A_j} A \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{c} B \xrightarrow{\delta_2|A_j} A \\ A \xrightarrow{\delta_1|B_i} B \end{array} \right]$$

$$\text{Corolario 1} \quad A \xrightarrow{\delta_1|B_i \mid \delta_2|A_j} B \equiv B \xrightarrow{\delta_2|A_j \mid \delta_1|B_i} A$$

$$\text{Prop. 2} \quad \left[\begin{array}{c} A \xrightarrow{\delta_1|B_i} B \\ \dots \\ A \xrightarrow{\delta_n|B_i} B \end{array} \right] \equiv \left[A \xrightarrow{\sum_{q=1}^n \delta_q|B_i} B \right]$$

Prop. 3 *Toda secuencia de ofertas elementales aplicadas a una matriz M se puede reescribir como una suma de M y un juego de suma cero, tal que esa suma sea la matriz del juego una vez aceptadas las ofertas.*

En Cantore, 2025 se da una recíproca de la Prop. 3, en el sentido de caracterizar en qué casos existe una secuencia finita de ofertas σ tal que aplicada a un juego genérico M resulta en $M + Z$ donde Z un juego de suma cero dado.

Def. 3 *Se define el siguiente abuso de notación, para que un jugador pueda ofertar varias veces seguidas.*³

$$\left[\begin{array}{c} A \xrightarrow{\delta_1|B_i} B \\ A \xrightarrow{\delta_2|B_j} B \\ \vdots \\ A \xrightarrow{\delta_n|B_k} B \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{c} A \xrightarrow{\delta_1|B_i} B \\ B \xrightarrow{0|A_0} A \\ A \xrightarrow{\delta_2|B_j} B \\ \vdots \\ B \xrightarrow{0|A_0} A \\ A \xrightarrow{\delta_n|B_k} B \end{array} \right]$$

³ Se justifica con que los otros ofrezcan 0 a A entre cada par de ofertas de A.

Def. 4 Sea $D = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ el conjunto de decisiones posibles para el jugador B . Si $S \subseteq D$, definimos $A \xrightarrow{\delta|S} B$ como la oferta en la cual A se compromete a transferir a B una cantidad δ siempre que B elija alguna estrategia perteneciente a S . En particular, si $S = S_1 \cup S_2$ para dos subconjuntos $S_1, S_2 \subseteq D$ tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, entonces

$$A \xrightarrow{\delta|S_1 \cup S_2} B \equiv \left[\begin{array}{l} A \xrightarrow{\delta|S_1} B \\ A \xrightarrow{\delta|S_2} B \end{array} \right]$$

lo que muestra que la oferta sobre la unión de subconjuntos puede entenderse como un paquete de ofertas simultáneas aplicadas a cada subconjunto.

Def. 5 Definimos $A \xrightarrow{\delta_1 | \sim} B$ como la oferta en la cual A se compromete a transferir a B una cantidad δ_1 , independientemente de la estrategia que elija B .

Claramente vale la equivalencia $A \xrightarrow{\delta_1 | \sim} B \equiv A \xrightarrow{\delta_1 | \cup_{i=0}^{n-1} \{B_i\}} B$, donde $B_0, \dots, B_{n-1}$ son las n estrategias de B .

Teorema 1 Dado $N \geq 1$ existen extensiones del Dilema del Prisionero para $N + 1$ jugadores tales que, tras cierta secuencia de ofertas de un jugador a cada uno del resto, aceptadas generan un equilibrio de Nash Pareto óptimo único⁴.

3.1. Extensión del lenguaje

Interesa extender el lenguaje de modo que recursivamente permita secuencias de mayor complejidad, como por ejemplo:

$$A \xrightarrow{\delta_1|B_i \mid \delta_2|A_j \mid \delta_3|B_k} B$$

Esto permite declarar ofertas que modifican varias filas/columnas en simultáneo. Siguiendo esta idea, es importante fijar una sintaxis y luego interpretarla en función del lenguaje anterior.

La extensión Sigue la sintaxis para 2 jugadores A y B , donde $\{x, y\}$ denota elección entre x o y y $\mid$ (largo) el intercambio de puntos por condicionalidad⁵.

$$\begin{array}{lll} \textcircled{a} ::= \delta | A_j & \textcircled{c} ::= \textcircled{b} \mid \textcircled{f} & \textcircled{e} ::= \{\textcircled{c}, \textcircled{b}\} \\ \textcircled{b} ::= \delta | B_i & \textcircled{d} ::= \textcircled{a} \mid \textcircled{e} & \textcircled{f} ::= \{\textcircled{d}, \textcircled{a}\} \end{array}$$

Se comienza por $\textcircled{e}$ para las ofertas posibles de A , y por $\textcircled{f}$ para las de B .

⁴ Véase la definición en Nash, 2024

⁵ En Cantore, 2025 se dan más detalles con una gramática libre de contexto.

Interpretación de la extensión Veamos cómo se interpreta este nuevo lenguaje en función del original, es decir cómo se reescribe con la sintaxis del original.

Def. 6 Sea $\mathcal{O}$ el conjunto de ofertas elementales del lenguaje original, $\mathcal{O}^+$ el conjunto de ofertas en la extensión del lenguaje y $\text{sec}(\mathcal{O})$ el conjunto de secuencias conformadas por ofertas en $\mathcal{O}$. Definimos $T : \mathcal{O}^+ \rightarrow \text{sec}(\mathcal{O})$ la función que, dada una oferta extendida, devuelve una secuencia simultánea de ofertas elementales equivalentes.

$$T\left(A \xrightarrow{\delta \mid B_i} B\right) = A \xrightarrow{\delta \mid B_i} B \quad T\left(A \xrightarrow{\delta \mid B_i \mid \dots} B\right) = \left[A \xrightarrow{\delta \mid B_i} B \right. \\ \left. T(B \xrightarrow{\dots} A) \right]$$

que, si bien anida corchetes, al tratarse de ofertas simultáneas podemos ignorar los grupos intermedios y considerar únicamente el corchete más externo.

3.2. Ventajas de la extensión

A diferencia del lenguaje original, donde si un jugador desea modificar 2 filas debe realizar 2 ofertas sucesivas y depender de que su oponente acepte ambas, en el nuevo lenguaje, es posible modificar cualquier cantidad de filas en simultáneo mediante una única oferta que sea aceptada. Lo cual es requerido si se quiere utilizar la Def. 4 en el contexto de un juego concreto.

4. Vínculo con las alianzas

4.1. Transformaciones GOI-multiplicadoras

En esta sección introducimos las transformaciones GOI-multiplicadoras, una variante de las transformaciones GOI de Goranko, 2022a y Goranko, 2022b. La motivación es que en ciertos acuerdos es frecuente establecer un reparto proporcional en vez de pagos fijos.

Def. 7 Una *Oferta GOI-multiplicativa para un juego de 2 jugadores* es una 4-tupla escrita sintácticamente de la forma: $A \xrightarrow{\delta \mid B_i} B$ donde $0 < \delta < 1$, teniendo en cuenta que si la oferta es aceptada, se modifica la fila o columna correspondiente a la decisión B_i de forma tal que A le otorga una proporción δ de su ganancia a B . La modificación de la tupla de pagos es de la forma: $(a, b) \rightarrow (a - \delta \cdot a, b + \delta \cdot a)$

Básicamente, se sigue un mecanismo similar al de las ofertas del tipo ya descrito, pero en vez de sumar/restar un número arbitrario, se suma/resta un porcentaje de la ganancia original del jugador que oferta. Notar que la ganancia transferida por una única oferta puede variar entre coordenadas de la matriz.

Dado que las ofertas GOI-multiplicativas modifican las ganancias de forma proporcional en lugar de absoluta, es necesario revisar las propiedades presentadas para el caso aditivo y verificar cuáles de ellas se conservan y cuáles requieren una reformulación.

Se define la noción de equivalencia de forma análoga a la def. 2. Aun siendo idéntica a la del caso aditivo, nótese que el orden en el que se aplican las ofertas

puede alterar el resultado, ya que las ganancias sobre las que actúa cada oferta cambian a lo largo del proceso. Esto es, secuencias con las mismas ofertas pero en distinto orden pueden no ser equivalentes.

En el caso de la Prop. 1, no va a seguir siendo válida, dado que ahora el orden importa. Como esta propiedad no se traslada a las ofertas multiplicativas, no vale el Corolario 1 ni la Prop. 2. La propiedad que sí resulta aplicable es la análoga a la Prop. 3.

Prop. 4 *Toda oferta elemental multiplicativa aplicada a una matriz M se puede reescribir como una suma entre M y un juego de suma cero, tal que esa suma sea la matriz del juego una vez aceptada la oferta.*

Notar que ahora las matrices de suma cero asociadas dependen de la matriz original.

En cuanto a las Definiciones 3, 4 y 5, estas pueden ser dadas análogamente para las ofertas multiplicativas porque, en el caso de la Def. 3, las ofertas mantienen el mismo orden. Por otro lado, las Def. 4 y 5 son posibles únicamente para ofertas que no se superponen.

$$\text{Prop. 5} \quad \left[\begin{array}{c} A \xrightarrow{\delta_0|B_0} B \\ A \xrightarrow{\delta_1|B_0} B \end{array} \right] \equiv A \xrightarrow{(\delta_0+\delta_1-\delta_0\delta_1)|B_0} B$$

Notar que para este caso particular, donde se tienen dos ofertas seguidas con los mismos jugadores, misma dirección y la misma decisión B_j , sí se tiene la propiedad de conmutatividad.

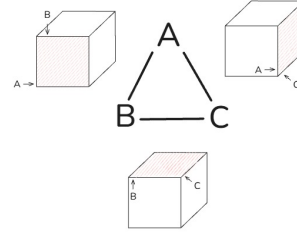
Lenguaje para las ofertas GOI-multiplicativas Las ofertas GOI-multiplicativas comparten la sintaxis de las introducidas en las transformaciones GOI de Goranko, 2022a y Goranko, 2022b. En consecuencia, es posible definir un lenguaje extendido con sintaxis idéntica a la del caso aditivo. La diferencia es la interpretación semántica de las ofertas, que implica una redistribución multiplicativa.

4.2. Representación de las Alianzas

El objetivo de esta sección es vincular las ofertas multiplicativas con la noción de alianza en torneos. Para juegos con más de 2 jugadores, surge la necesidad de generalizar la definición de oferta: especificar a qué jugador se dirige y qué elementos de la matriz de pagos se modifican al aceptarse. También se busca representar toda la información de las matrices de pago del torneo en un único juego de N jugadores, permitiendo redistribuir las ganancias mediante ofertas multiplicativas.

Consideremos un juego de 3 jugadores A, B, C , cada uno con 3 estrategias, representable como un cubo donde las decisiones de A , B y C corresponden a las dimensiones *altura*, *ancho* y *profundidad*, respectivamente. Es posible realizar tres cortes en dicho cubo, uno por cada par de jugadores.

Estableciendo una de las estrategias de cada jugador como “no jugar”⁶, el corte generado por elegir esta estrategia resulta en un juego de 2 en el cual asignaremos ganancia 0 tanto al jugador que tomó la estrategia de “no jugar” como a los jugadores participantes si estos tomaran la misma estrategia. Para cada corte, con cada tripla denotando las ganancias de A , B y C en ese orden:



$$AB = \begin{pmatrix} (a, b, 0) & (c, d, 0) & (0, 0, 0) \\ (e, f, 0) & (g, h, 0) & (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) & (0, 0, 0) & (0, 0, 0) \end{pmatrix} \quad AC = \begin{pmatrix} (a, 0, b) & (c, 0, d) & (0, 0, 0) \\ (e, 0, f) & (g, 0, h) & (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) & (0, 0, 0) & (0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} (0, a, b) & (0, c, d) & (0, 0, 0) \\ (0, e, f) & (0, g, h) & (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) & (0, 0, 0) & (0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

Para construir el juego de 3 dimensiones que represente el torneo, se toman los cortes donde participan exactamente 2 jugadores, extrayendo la sub-matriz sin las decisiones de “no jugar”. Las tuplas fuera de estos cortes se asumen con ganancia 0 para todos. Así, es posible definir ofertas para juegos de 3 dimensiones que afecten simultáneamente a todas las matrices del torneo. Una vez definido el cubo que vincula las 3 matrices, resta establecer la definición de las ofertas para el caso en que participan más de 2 jugadores.

Def. 8 Una oferta multiplicativa para un juego de N jugadores es una 4-tupla escrita sintácticamente de la forma: $A \xrightarrow{\delta|B_i} B$ donde $0 < \delta < 1$, y si la oferta es aceptada se producen modificaciones en el hiperplano correspondiente a la decisión B_i de forma tal que A le otorga una proporción δ de su ganancia a B . Sean i, j las posiciones de las ganancias de A y B entonces la modificación de la N -tupla del hiperplano correspondiente a la decisión B_i queda de la forma:

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_N) \longrightarrow (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - \delta \cdot a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j + \delta \cdot a_i, a_{j+1}, \dots, a_N)$$

donde la resta y la suma aparecen en las coordenadas i y j respectivamente.

Para representar las alianzas, siguiendo con el ejemplo, se agregan 3 jugadores auxiliares, P_A, P_B, P_C que representaran a las alianzas de A, B y C respectivamente. Cada uno de los nuevos jugadores tendrán sólo una estrategia (P_0), y ganarán 0 puntos. Luego, agregando los puntajes de los nuevos jugadores en las últimas posiciones de la tupla de pagos, nuestros 3 cortes quedarán de la siguiente forma:

$$AB = \begin{pmatrix} (a, b, 0, 0, 0, 0) & (c, d, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (e, f, 0, 0, 0, 0) & (g, h, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

⁶ decisión impuesta por la estructura del torneo y no elegida por los jugadores

$$AC = \begin{pmatrix} (a, 0, b, 0, 0, 0) & (c, 0, d, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (e, 0, f, 0, 0, 0) & (g, 0, h, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} (0, a, b, 0, 0, 0) & (0, c, d, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, e, f, 0, 0, 0) & (0, g, h, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta estas modificaciones, tomemos un caso específico para ver cómo se modifica el cubo (en particular nuestros cortes) con la siguiente secuencia de ofertas GOI-multiplicativas:

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{1|P_0} P_A \\ B &\xrightarrow{\frac{3}{4}|P_0} P_A \\ P_A &\xrightarrow{\frac{1}{2}|\sim} A \\ P_A &\xrightarrow{1|\sim} B \end{aligned}$$

Con esto, las matrices quedarán modificadas de la siguiente forma:

$$AB' = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}a + \frac{3}{8}b, \frac{1}{2}a + \frac{5}{8}b, 0, 0, 0, 0) & (\frac{1}{2}c + \frac{3}{8}d, \frac{1}{2}c + \frac{5}{8}d, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (\frac{1}{2}e + \frac{3}{8}f, \frac{1}{2}e + \frac{5}{8}f, 0, 0, 0, 0) & (\frac{1}{2}g + \frac{3}{8}h, \frac{1}{2}g + \frac{5}{8}h, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

$$AC' = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, b, 0, 0, 0) & (\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c, d, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (\frac{1}{2}e, \frac{1}{2}e, f, 0, 0, 0) & (\frac{1}{2}g, \frac{1}{2}g, h, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

$$BC' = \begin{pmatrix} (\frac{3}{8}b, a, \frac{5}{8}b, 0, 0, 0) & (\frac{3}{8}d, c, \frac{5}{8}d, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (\frac{3}{8}f, e, \frac{5}{8}f, 0, 0, 0) & (\frac{3}{8}h, g, \frac{5}{8}h, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

Se observa que, al omitir las filas y columnas correspondientes a “no jugar”, las matrices resultantes coinciden con aquellas obtenidas al considerar la alianza representado por el grafo de la Figura 1 (*parcial compleja* cf. Cantore, 2025):

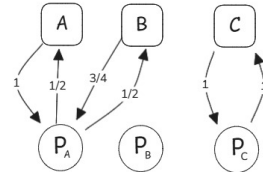


Figura 1: Grafo dirigido con los aportes de los jugadores a distintas alianzas.

Def. 9 La *conjunción de un torneo* para N jugadores sobre cierto juego bi-personal es la extensión de dicho juego a una matriz N -dimensionada donde cada jugador tiene las mismas estrategias que en el juego original más la estrategia de “no jugar”, para la que todos los jugadores tienen siempre ganancia 0, salvo en los cortes en que todos los jugadores salvo 2 eligen “no jugar”, en cuyo caso se representan los pagos como si esos 2 jugadores estuvieran jugando, salvando las tuplas donde alguno juega “no jugar”, decisión para la cual ganan 0; más el agregado de N jugadores auxiliares con una única estrategia de ganancia 0 en todos los casos.

Teorema 2 *Dada una configuración que represente un conjunto de alianzas parciales para un torneo, existe una secuencia de ofertas GOI-multiplicativas dentro de la conjunción de dicho torneo que representa una redistribución de los puntos acorde al conjunto de alianzas parciales en caso de ser aceptadas.*

Demostración. Sea N la cantidad de jugadores que participan del torneo, cada jugador numerado de 1 a N . Sea S_r la cantidad de estrategias para el jugador r . Sea C la conjunción del torneo.

Se quiere ver cómo reproducir con ofertas sobre C la redistribución de pagos de una alianza genérica A_1 en la que, sin pérdida de generalidad, participan los jugadores $J_1, J_2, \dots, J_k$ (véase Figura 2).

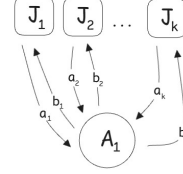


Figura 2: Aportes de los jugadores a las alianzas y ganancias de estos.

Considerando el siguiente corte ⁷ genérico de C para los jugadores J_l y J_w (ignorando la fila y columna donde se juegan las estrategias de “no jugar”), sean las filas las estrategias de J_l y las columnas las de J_w , y sea el tercer subíndice el identificador de la ganancia de cada jugador:

$$\begin{pmatrix} (x_{111}, x_{112}, \dots, x_{11N}, 0, \dots, 0) & \dots & (x_{1S_{J_w}1}, x_{1S_{J_w}2}, \dots, x_{1S_{J_w}N}, 0, \dots, 0) \\ \dots & & \dots \\ (x_{S_{J_l}11}, x_{S_{J_l}12}, \dots, x_{S_{J_l}1N}, 0, \dots, 0) & \dots & (x_{S_{J_l}S_{J_w}1}, x_{S_{J_l}S_{J_w}2}, \dots, x_{S_{J_l}S_{J_w}N}, 0, \dots, 0) \end{pmatrix}$$

A continuación, se describe la secuencia de modificaciones que experimenta esta matriz, utilizando la siguiente tupla de pagos genérica: $(x_{ij1}, \dots, x_{ijk}, \dots, x_{ijN}, 0, 0, \dots, 0)$

Consideremos la siguiente secuencia de ofertas:

$$\begin{aligned} J_1 &\xrightarrow{a_1 | P_0} A_1 \\ J_2 &\xrightarrow{a_2 | P_0} A_1 \\ \dots &\xrightarrow{\dots | P_0} A_1 \\ J_k &\xrightarrow{a_k | P_0} A_1 \end{aligned} \tag{1}$$

donde la tupla de pagos queda modificada como

$$((1 - a_1)x_{ij1}, \dots, (1 - a_k)x_{ijk}, x_{ij(k+1)}, \dots, x_{ijN}, \sum_{q=1}^k a_q x_{ijq}, 0, \dots, 0)$$

seguidas de las siguientes ofertas

$$\begin{aligned} A_1 &\xrightarrow{b_1 | \sim} J_1 \\ A_1 &\xrightarrow{\frac{b_2}{1-b_1} | \sim} J_2 \\ &\vdots \\ A_1 &\xrightarrow{\frac{b_i}{1-\sum_{p=1}^{i-1} b_p} | \sim} J_i \\ &\vdots \\ A_1 &\xrightarrow{1 | \sim} J_k \end{aligned} \tag{2}$$

⁷ Correspondiente a los cortes pertinentes, donde solo 2 jugadores no optan por “no jugar”.

Notemos que J_1 va a recibir una ganancia de la forma $b_1 \cdot \sum_{q=1}^k a_q x_{ijq}$ y que cada J_i con $1 < i$ recibe una ganancia de la forma:

$$\frac{b_i}{1 - \sum_{p=1}^{i-1} b_p} \cdot (1 - \sum_{p=1}^{i-1} b_p) \cdot \sum_{q=1}^k a_q x_{ijq} = b_i \cdot \sum_{q=1}^k a_q x_{ijq}$$

Luego, la tupla de pagos será:

$$((1 - a_1)x_{ij1} + b_1(\sum_{q=1}^k a_q x_{ijq}), \dots, (1 - a_k)x_{ijk} + b_k(\sum_{q=1}^k a_q x_{ijq}), x_{ij(k+1)}, \dots, x_{ijN}, 0, 0, \dots, 0)$$

Caso 1, ninguno de los jugadores que están jugando pertenecen a A_1 . Todos los x_{ijy} con $1 \leq y \leq k$ son ganancia 0, por lo tanto la tupla queda:

$$(0, \dots, 0, x_{ij(k+1)}, \dots, x_{ijN}, 0, \dots, 0)$$

Observemos que tiene sentido, porque la alianza no modifica la ganancia de los jugadores que no forman parte de ella.

Caso 2, sólo uno de los jugadores que están jugando pertenece a A_1 . Sólo uno de los x_{ijy} con $1 \leq y \leq k$ tiene ganancia. Digamos que es J_1 ⁸.

$$((1 - a_1)x_{ij1} + b_1 a_1 x_{ij1}, b_2 a_1 x_{ij1}, \dots, b_k a_1 x_{ij1}, x_{ij(k+1)}, \dots, x_{ijN}, 0, \dots, 0)$$

Caso 3, ambos jugadores que están jugando pertenecen a A_1 . Sólo 2 de los x_{ijy} con $1 \leq y \leq k$ tienen ganancia. Digamos que son J_1 y J_2 , pero podría ser cualquier par de entre los miembros de la alianza.

$$((1 - a_1)x_{ij1} + b_1(a_1 x_{ij1} + a_2 x_{ij2}), (1 - a_2)x_{ij2} + b_2(a_1 x_{ij1} + a_2 x_{ij2}), b_3(a_1 x_{ij1} + a_2 x_{ij2}), \dots, b_k(a_1 x_{ij1} + a_2 x_{ij2}), x_{ij(k+1)}, \dots, x_{ijN}, 0, \dots, 0)$$

Notar que en todos los casos la redistribución de puntos entre los miembros de la alianza resulta igual que las definidas para las alianzas parciales. Luego, se tiene una secuencia de ofertas dentro de la conjunción del torneo, para redistribuir los puntos asociados a una alianza genérica del mismo. Queda entonces proceder análogamente con el resto de las alianzas, lo cual es inmediato porque, cada jugador sólo puede pertenecer a una sola de estas.

Una observación importante sobre las secuencias de ofertas que utilizamos es que, en la secuencia 1, el orden en que se realizan no afecta el resultado: las ofertas pueden hacerse en cualquier orden. En cambio, en la secuencia 2, el orden sí importa. Sin embargo, es posible reestructurar la secuencia de modo que se obtenga una nueva configuración equivalente, manteniendo el mismo esquema de asignación, pero dirigiendo las ofertas a distintos jugadores y, naturalmente, modificando los montos ofrecidos a cada uno.

5. Conclusiones

El concepto de alianza introduce una dimensión interesante en el estudio de los torneos y de la teoría de juegos en general, permitiendo modelar fenómenos de cooperación en entornos competitivos y representar interacciones realistas y

⁸ El procedimiento con cualquier otro es análogo.

complejas entre jugadores que encuentran incentivos para coordinarse, establecer acuerdos o incluso actuar estratégicamente contra otros participantes.

Se ha revisado un sistema para el análisis de torneos sobre juegos en forma normal, incorporando la posibilidad de alianzas entre jugadores, como situaciones realistas de cooperación y competencia. Se han analizado diversas propiedades de las alianzas, se propuso una extensión del lenguaje de ofertas GOI en el pre-juego y se exploraron propiedades en torno a su expresividad. Se mostró que las ofertas GOI-multiplicativas permiten una representación con alianzas parciales.

Entre las posibilidades de trabajo futuro se destacan el estudio de condiciones que permitan transformaciones en sentido inverso al del Teorema 2 y de dinámicas de ofertas que puedan ser aceptadas o rechazadas en el marco de juegos secuenciales. También, se podría explorar posibles resultados y limitaciones para el caso de jugadores que pueden pertenecer a múltiples alianzas a la vez.

Referencias

- Andreoni, J., & Varian, H. (1999). Preplay Contracting in the Prisoners' Dilemma. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 96(19), 10933-10938. <https://doi.org/10.1073/pnas.96.19.10933>
- Axelrod, R., & Hamilton, W. D. (1981). The Evolution of Cooperation. *Science*, 211(4489), 1390-1396.
- Blume, A., Kriss, P. H., & Weber, R. A. (2017). Pre-play Communication with Forgone Costly Messages: Experimental Evidence on Forward Induction. *Experimental Economics*, 20(2), 368-395. <https://doi.org/10.1007/s10683-016-9487-y>
- Cantore, L. (2025). Alianzas en ámbito de torneos [Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires - FCEN]. <https://github.com/lucascantore/tesis-de-licenciatura/blob/main/TesisLucasCantore.pdf>
- Goranko, V. (2022a). Preplay Negotiations with Unconditional Offers of Side Payments in Two-Player Strategic-Form Games: Towards Non-Cooperative Cooperation. *Mathematics*, 10(14). <https://doi.org/10.3390/math10142518>
- Goranko, V. (2022b). Transformations of Multi-Player Normal Form Games by Preplay Offers between Players. *Axioms*, 11(2). <https://doi.org/10.3390/axioms11020073>
- Goranko, V., & Turrini, P. (2016). Two-Player Preplay Negotiation Games with Conditional Offers. *International Game Theory Review*, 18(01), 1550017. <https://doi.org/10.1142/S0219198915500176>
- Nash, J. F. (2024). Non-Cooperative Games. En *The Foundations of Price Theory Vol 4* (pp. 329-340). Routledge.
- Segal, I. (1999). Contracting with Externalities. *The Quarterly Journal of Economics*, 114(2), 337-388. <https://doi.org/10.1162/003355399556016>
- Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd rev. Princeton University Press.