

Five Geometric Perspectives on Approximate Fronts in MOEA/D for the Biobjective JOBPRP: Preliminary Results

Fabio M. Miguel¹, Mariano Frutos^{2,3,4}, Máximo Méndez⁵, Begoña González⁵,
and Florencia Jaureguiberry⁶

¹ Universidad Nacional de Río Negro (UNRN), Sede Alto Valle y Valle Medio;
CONICET, Argentina
`fmiguel@unrn.edu.ar`

² Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur (UNS), Argentina
`mfrutos@uns.edu.ar`

³ Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales del Sur (IIESS, UNS-CONICET),
Argentina

⁴ Instituto de Ingeniería (II, UNS-CIC), Argentina

⁵ Instituto Universitario SIANI, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
(ULPGC), España

`maximo.mendez@ulpgc.es`, `bego.landin@ulpgc.es`

⁶ Escuela de Estudios Sociales y Administrativos, Universidad Nacional de Río Negro
(UNRN), Sede Alto Valle y Valle Medio, Argentina
`fjaureguiberry@unrn.edu.ar`

Abstract. This short paper presents a preliminary extension of the study published by Miguel, Frutos, Méndez and González (2025) on MOEA/D applied to the biobjective JOBPRP. Starting from an already executed comparative campaign, the final fronts of AASF, TCH, PBI and NSGA-II are reexamined through five complementary geometric perspectives: empirical attainment, regional partition of the union front, local spacing, discrete curvature with an operational knee, and pointwise and regional contribution to hypervolume. The analysis focuses on instances DS3–DS6, which are the most informative for contrasting coverage, local regularity and compromise structure. The preliminary results suggest a stable pattern: AASF tends to be better positioned when the comparison privileges frequent occupation of the dominated space and total hypervolume value; TCH preserves the most favorable evidence in DS4; and PBI remains competitive when the reading shifts toward local front uniformity. This extension does not replace the aggregated indicators of the 2025 study, but rather adds a geometric reading that is useful for deciding which methods are worth studying later in interactive preference elicitation scenarios.

Keywords: MOEA/D , Biobjective JOBPRP , Empirical Attainment , Local Spacing , Knee , Hypervolume

Análisis Geométrico de Frentes de MOEA/D en el JOBPRP Biobjetivo: Resultados Preliminares

Resumen Este artículo corto presenta una ampliación preliminar del estudio publicado por Miguel, Frutos, Méndez y González (2025) sobre MOEA/D aplicado al JOBPRP biobjetivo. A partir de una campaña comparativa ya ejecutada, se reexaminan los frentes finales de AASF, TCH, PBI y NSGA-II mediante cinco perspectivas geométricas complementarias: attainment empírico, partición regional del frente unión, spacing local, curvatura discreta con rodilla operativa y contribución puntual y regional al hipervolumen. El análisis se concentra en las instancias DS3–DS6, que son las más informativas para contrastar cobertura, regularidad local y estructura de compromiso. Los resultados preliminares sugieren un patrón estable: AASF tiende a quedar mejor posicionado cuando la comparación privilegia ocupación frecuente del espacio dominado y valor total de hipervolumen; TCH conserva la evidencia más favorable en DS4; y PBI sigue siendo competitivo cuando la lectura se desplaza hacia la uniformidad local del frente. Esta ampliación no sustituye los indicadores agregados del estudio de 2025, sino que añade una lectura geométrica útil para decidir qué métodos conviene estudiar luego en escenarios de elicitación interactiva de preferencias.

Palabras Clave MOEA/D , JOBPRP Biobjetivo , Attainment Empírico , Spacing Local , Rodilla , Hipervolumen

1. Introducción y motivación

Miguel et al. (2025) compararon varias escalarizaciones dentro de MOEA/D para una variante biobjetivo del JOBPRP, centrada en costo operativo y balance de carga, mediante indicadores agregados de volumen, proximidad al ideal y dispersión del frente. Esa evidencia fue suficiente para mostrar que AASF, TCH y PBI no se ordenan de la misma manera en todas las instancias. Sin embargo, los indicadores escalares dejan abierta una pregunta relevante para el diseño de métodos y de interfaces de decisión: *qué rasgo geométrico del frente aproxima mejor cada escalarización*.

Este trabajo replantea esa pregunta como un artículo corto de avance. En lugar de intentar un estudio exhaustivo, se busca identificar resultados preliminares sólidos que justifiquen una línea de investigación. El foco se restringe a DS3–DS6 porque allí la comparación entre AASF, TCH, PBI y NSGA-II ofrece los contrastes más informativos entre cobertura global, regularidad local y estructura de compromiso.

La idea central es sencilla: las cinco perspectivas consideradas no reemplazan a los indicadores agregados, pero sí permiten distinguir si una ventaja proviene de cubrir con mayor frecuencia el espacio dominado, de poblar mejor la vecindad de la rodilla, de mantener huecos más uniformes o de repartir de modo distinto el valor marginal del hipervolumen.

2. Diseño experimental y perspectivas geométricas

Se parte de la misma campaña comparativa considerada en Miguel et al. (2025), con 31 ejecuciones pareadas por método en cada una de las instancias DS3, DS4, DS5 y DS6. Sobre los frentes finales factibles se aplicó un posanálisis geométrico común: depuración, eliminación de duplicados, extracción del subconjunto no dominado, normalización por instancia y, cuando correspondía, reparametrización por longitud de arco. El marco comparativo incluye TCH, PBI y AASF dentro de MOEA/D, junto con NSGA-II como referencia externa (Deb et al., 2002; Zhang & Li, 2007).

Las cinco perspectivas pueden resumirse de forma compacta. La primera estima la frecuencia empírica con la que un método domina una región del plano objetivo, permitiendo comparar cobertura frecuencial.

$$\hat{\alpha}_m(z) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \mathbf{1}\{\exists p \in F_{m,r} : p \preceq z\}, \quad (1)$$

Esta expresión define el *estimador empírico de la función de attainment* del método m en el punto z . En un problema biobjetivo de minimización, $\hat{\alpha}_m(z)$ representa la fracción de las R corridas del método m en las que el frente final $F_{m,r}$ contiene al menos un punto p que domina o alcanza a z , es decir, tal que $p \preceq z$.

Aquí, m identifica el método o variante comparada, $z = (z_1, z_2)$ es el punto del espacio objetivo en el que se evalúa el attainment, R es el número total de corridas consideradas y r indexa cada una de esas corridas. Asimismo, $F_{m,r}$ denota el frente final obtenido por el método m en la corrida r , mientras que p es un punto de ese frente. La relación $p \preceq z$ expresa dominancia de Pareto en minimización; en el caso biobjetivo, significa usualmente que $p_1 \leq z_1$ y $p_2 \leq z_2$.

En consecuencia, valores altos de $\hat{\alpha}_m(z)$ indican que el método domina con mayor regularidad el punto z a través de las corridas. Por tanto, esta función no describe la calidad de un punto aislado, sino la reproducibilidad con la que un método cubre una región del espacio objetivo.

La segunda perspectiva construye la unión empírica no dominada y la divide en una región orientada al costo, una zona de rodilla y una región orientada al balance. La tercera usa el spacing local $\Delta_i = \|p_{i+1} - p_i\|_2$ sobre frentes ordenados y normalizados. La cuarta añade una curvatura discreta y una localización operativa de la rodilla. La quinta calcula la contribución exclusiva $\Delta HV_i = HV(F) - HV(F \setminus \{p_i\})$ y sus agregaciones regionales (Beume et al., 2007; Branke et al., 2004; Fonseca et al., 2011; Schott, 1995).

Las comparaciones entre métodos se mantuvieron pareadas por corrida y se apoyaron en contrastes no paramétricos. En esta versión corta solo se retienen los patrones que permanecen consistentes bajo esa comparación.

3. Resultados preliminares

La Fig. 1 sintetiza la señal de cobertura más visible del estudio. Las diferencias de attainment empírico favorecen a AASF en DS3, DS5 y DS6, mientras que DS4 es el único caso donde TCH conserva una ventaja espacial apreciable en el sector de menor desbalance. Esta lectura es coherente con el valor final de hipervolumen y proporciona una primera conclusión: la comparación entre escalarizaciones depende de dónde se construye el frente, no solo de cuánto volumen domina.

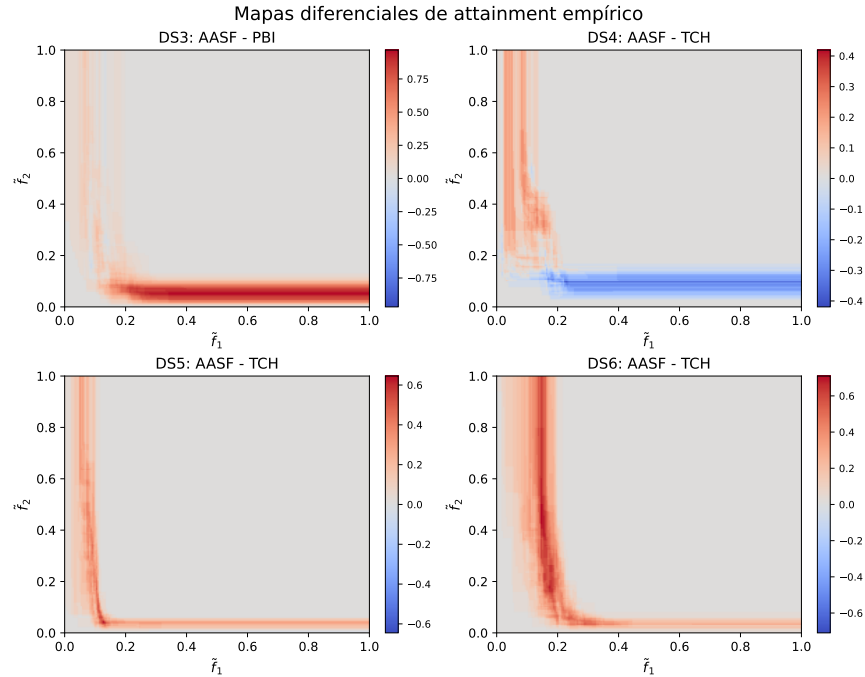


Figura 1. Mapas diferenciales de attainment empírico. Las regiones rojas favorecen a AASF y las azules al método de referencia.

La Tabla 1 resume la lectura integrada de las cinco perspectivas. En DS3 aparece la separación más clara entre cobertura y regularidad: AASF obtiene la evidencia más favorable en attainment e hipervolumen, pero PBI conserva el spacing más uniforme y concentra más valor alrededor de la rodilla. En DS4 ocurre lo contrario: TCH mantiene la mejor señal combinada en cobertura, volumen y localización de la rodilla, mientras que las diferencias de regularidad entre las variantes de MOEA/D son pequeñas.

DS5 es el caso más favorable a AASF dentro de este conjunto preliminar. Allí convergen la mayor attainment, el mayor hipervolumen y una alineación de la rodilla más próxima al frente unión, aunque PBI sigue mostrando mejor uniformidad local. DS6 vuelve a situar a AASF en una posición ventajosa bajo cobertura y volumen, pero la partición regional pierde poder discriminativo porque el tramo orientado al balance prácticamente colapsa. Esta pérdida de resolución zonal también es un resultado relevante: indica que no todas las instancias ofrecen la misma granularidad geométrica para orientar la comparación.

En conjunto, los resultados preliminares sugieren que NSGA-II queda sistemáticamente por detrás de las variantes basadas en descomposición en las cuatro instancias analizadas. Entre estas últimas, la elección de un método prometedor depende del rasgo que se quiera preservar: cobertura frecuente del espacio dominado, uniformidad local del frente o representación de la región de compromiso.

Tabla 1. Lectura preliminar integrada de las cinco perspectivas geométricas.

Instancia	Cobertura y valor	Regularidad y compromiso	Lectura sintética
DS3	AASF presenta la mayor attainment y el mayor hipervolumen final.	PBI muestra spacing más uniforme y mayor concentración de valor en la vecindad de la rodilla.	Caso paradigmático para separar cobertura global de regularidad local.
DS4	TCH conserva la evidencia más favorable en attainment y volumen.	La rodilla queda bien representada por TCH y las diferencias de spacing entre variantes de MOEA/D son acotadas.	Instancia más favorable a TCH bajo este conjunto de lentes.
DS5	AASF reúne la evidencia más favorable en attainment, hipervolumen y alineación con la rodilla.	PBI sigue siendo más regular localmente.	Mejor caso para AASF, aunque no implica dominancia universal.
DS6	AASF vuelve a liderar attainment e hipervolumen.	La partición regional pierde resolución porque el tramo de balance se colapsa.	Evidencia favorable a AASF con lectura zonal menos discriminativa.

4. Implicancias para elicitación interactiva de preferencias

El interés de esta ampliación no es meramente descriptivo. En un escenario de elicitación interactiva de preferencias, los resultados sugieren preguntas operativas muy concretas. Si la interacción privilegia alternativas cercanas a la rodilla, conviene estudiar métodos que mantengan buena cobertura y buena alineación con la región de compromiso, como AASF en DS5 o TCH en DS4. Si la interfaz exige un frente localmente uniforme para facilitar navegación y comparación entre alternativas vecinas, PBI sigue siendo un candidato natural. Si, en cambio, las consultas sucesivas deberían concentrarse en puntos con mayor contenido informativo, la distribución marginal del hipervolumen ofrece una señal prometedora para priorizar regiones.

El aporte de este artículo corto es acotado pero útil: transforma una comparación basada en indicadores agregados en una agenda geométrica para la interacción futura.

5. Conclusiones

Este trabajo reporta una primera ampliación geométrica del estudio de Miguel et al. (2025) sobre MOEA/D en el JOBPRP biobjetivo. Las cinco perspectivas consideradas muestran que no existe una única noción de mejor frente. En las instancias analizadas, AASF tiende a quedar mejor posicionado cuando la comparación privilegia attainment e hipervolumen; TCH conserva la señal más favorable en DS4; y PBI mantiene una ventaja cuando el criterio de interés es la uniformidad local. Estos resultados preliminares justifican una siguiente etapa centrada en evaluar qué combinación de cobertura, regularidad y estructura de

compromiso conviene cuando la búsqueda se inserta en un marco de elicitación interactiva de preferencias.

Referencias

- Beume, N., Naujoks, B., & Emmerich, M. (2007). SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume. *European Journal of Operational Research*, 181(3), 1653–1669. doi:10.1016/j.ejor.2006.08.008
- Branke, J., Deb, K., Dierolf, H., & Osswald, M. (2004). Finding knees in multi-objective optimization. In *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VIII* (pp. 722–731). Springer. doi:10.1007/978-3-540-30217-9_73
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182–197. doi:10.1109/4235.996017
- Fonseca, C. M., Guerreiro, A. P., López-Ibáñez, M., & Paquete, L. (2011). On the computation of the empirical attainment function. In *Evolutionary Multi-Criterion Optimization* (pp. 106–120). Springer. doi:10.1007/978-3-642-19893-9_8
- Miguel, F. M., Frutos, M., Méndez, M., & González, B. (2025). *Método de descomposición para optimización multiobjetivo del procesamiento por lotes de pedidos*. In *Simposio de Informática Industrial e Investigación Operativa (SIIIO 2025)-JAIIO 54*. URI: <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/190909>
- Schott, J. R. (1995). *Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization* (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).
- Zhang, Q., & Li, H. (2007). MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 11(6), 712–731. doi:10.1109/TEVC.2007.892759